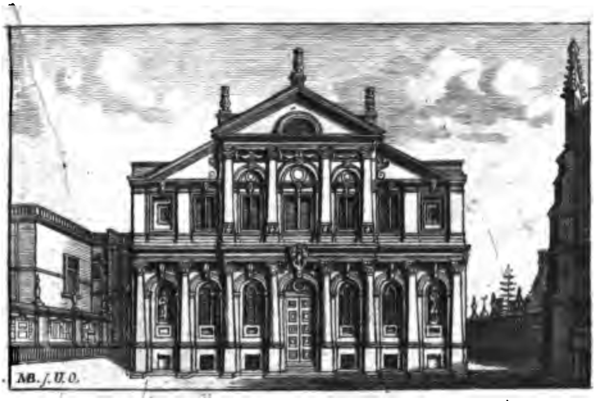
Sectionum Conicarum

ELEMENTA

NOVA METHODO DEMONSTRATA.

thore JACOBO MILNES, Rectore de INGESTRE in Agro STAFFORDIENSI.



OXONIÆ,

THEATRO SHELDONIANO. MDCCII.

Impensis ANTH. PEISLEY Bibliop.

Imprimatur,

RO. MANDER

Vice-Can. OXON.

Maii 19. 1702.

CELEBERRIMÆ

ACADEMIÆ

OXONIENSI

IN USUM

STUDIOSÆ JUVENTUTIS

OPUSCULUM HOC

Humillime D.

J. MILNES.

PRÆFATIO.

IN hisce Elementis concinnandis id potissimùm egi, ut præcipuas Sectionum Conicarum proprietates quàm possem breviter & dilucidè demonstratas darem.

Hunc in finem proprietates cognatas conatus sum neralibus (ut plurimùm) theorematis complecti; inoris notæ aliquammultas aliarumve tantùm demonstrationibus præmitti solitas, resecui; usu præpuè commendatas, aut è quibus penitior Sectionum atura perspecta sit, inserui; has denique eo ordine disosui ut (rarissimè aliis iis in auxilium vocatis) posteores à prioribus facili ac continuo nexu pendeant; ab hisce illarum veritas haud coactè emanet.

In principalioribus Sectionum affectionibus (quisque reliquarum quasi cardo vertitur) eliciendis, o instituti ratione, methodo peculiari, (& ab omnis mihi hactenus cognitis longè diversâ) usus sum: uâ & operis compendio prospexi, simulque effeci proprietates haud paucas, aliàs molestâ schemam intricaciâ laborantes, in plano demonstrare conssum sit.

In cæteris (quibus operis moles non nititur) majam tritâ viâ incedere, quam (nullo lectoris mmodo vel emolumento) nova ubique demonandi media conquirere; Virique Cl. P. de la ire *(omni fere alio librorum subsidio destitutus) monstrationes plerumque adhibui. Hujus propoones lemmaticas ex libri primi parte prima & sendâ (operis scilicet maximi) quotquot usui erant,* hûc

hûc transtuli. Quæ verò ejusdem libri primi pa
tertiâ pluribus propositionibus in circulo demonstra
totidem quasi aliis libri secundi præmittit Vir
inveniet hîc Lector in omnibus Sectionibus eâde
operâ ostensa.

Hæc denique in privatum usum elucubrata, c
Viris doctis non displicere comperissem, suadentib
amicis annui ut publici juris essent. Nec alio s
quàm scientias Mathematicas (siqua possem) pr
movendi studio; quæ uti in omni vitâ sunt longè u
lissimæ, sic in universæ naturæ phænomenôn ca
investigandis apprimè necessariæ: cum nempe
ipsæ naturales cum ideis ullis quas de iis mens no
effingere valet, præter ea quæ mathesis contempl
potis est, (molem puta, figuram, pondus, motum,
haud quicquam commune habeant.

PA

PARS I.

SECTIO I.

Definitiones.

SI à puncto quovis A extra circuli BDEC planum posito, Recta linea AE utrinque infinite extensa, per totam circuli peripheriam rcumagatur; Binæ hujusmodi motu genitæ superficies, sigillatim Conicæ superficies appellantur. *Fig.* 1,2.

II. Conjunctim vero, superficies ad verticem oppositæ, el simpliciter superficies oppositæ.

III. Punctum A Vertex dicitur.

IV. Circulus BDEC Basis.

V. Recta AG per verticem A & basis centrum C trinque infinite producta Axis.

VI. Solidum superficie conica & basi contentum Conus dicitur.

VII. Et quidem, si axis ad basim rectus fuerit, Conus Rectus. 1.

VIII. Si inclinatus, Conus Scalenus. 2.

IX. Communis plani alicujus cum superficie conica tersectio, Sectio Conica dicitur.

Corollarium def. 1. Recta per punctum quodvis in travis superficie & verticem ducta, tota est in eadem perficie; Productaque ultra verticem est in superficie posita.

Prop. I. Theorema I.

Recta linea AE, per verticem A ducta ad quodvis nctum E intra utramvis superficierum oppositarum, 3.

quantumvis utrinque producta, intra superficies co cas continetur. Rectaque per verticem A ducta ad qui libet punctum G extra utramque superficiem, qua tumuis producta, extra utramque superficiem manet.

Hæc propositio clarior est, quam ut demonstratio egeat.

Prop. II. Theor. II.

Si per binas quascunque rectas AB. AC per verti
4. *cem A in superficie conica ductas, cogitetur transi planum; Idem superficiei conicæ solummodo in recti AB, AC occurrit; Et superficiei oppositæ in eisde AB, AC productis.*

Occurrant rectæ basis peripheriæ in B, C; Sump in eadem peripheria quolibet puncto F, & conne A F; Cum sit (ex natura circuli) punctum F ext rectam BC, erit recta AF extra planum ABC, pr ductaque ultra verticem erit extra planum productu Idemque erit de omnibus rectis in superficie conica pr ter AB, AC.

Corollar. 1. Hinc planum per AB, AC, intra ang lum BAC atque intra angulum huic ad verticem o positum, est intra superficies conicas, intra angul vero qui sunt his deinceps, est extra easdem.

Coroll. 2. Communis intersectio plani alicujus cu superficie conica & basi erit triangulum.

Prop. III. Theor. III.

Recta linea ED, conjungens bina quæcunque pu
5. *cta E, D in eadem conica superficie sumpta, Erit to intra superficiem conicam; productaque neutri superfi erum oppositarum amplius occurrit. Contra, recta E*
6. *conjungens bina puncta E, D in oppositis superficieb sumpta, erit extra utramque superficiem; productaq utrinque intra utramque deinceps continetur, neutriq earum amplius occurrit.*

Nam ductis AE, AD & productis in B, C; Planu per ABC, in quo sita est recta AD, non occurit s

perficiebu

perficiebus, nisi in ipsis rectis A E C, A D B; Neque recta D E amplius occurrit rectis A B, A C quam in D, E; Ergo non occurrit superficiebus nisi in D, E. Et quoad situm externum vel internum servat necessario conditiones plani sui Corollario 1° præced. expositas.

Prop. IV. Theor. IV.

Si Circulum, qui basis est coni, contingat recta D E in D, à coni autem vertice A ad contactum D, agatur recta A D; Planum A D E, per utramque rectam productum, coni superficiem secundum rectam A D continget. 7.

Recta A D tum superficiei conicæ tum plano A D E communis est; Cum vero præter D, quodvis punctum F in baseos peripheria sit extra rectam D E, Erit etiam præter D A, quævis alia recta in superficie Conica F A, extra planum A D E; unde liquet propositum.

Coroll. 1. Hinc & ex def. 1. liquet planum A D E productum, superficiem oppositam in D A producta contingere.

Coroll. 2. Hinc etiam patet methodus ducendi planum, quod superficiem Conicam in data recta A D contingat. Ducta nempe in plano baseos recta D E peripheriam ejus in D contingente, Actoque per A D, D E plano A D E, proposito satisfiet.

Coroll. 3. Præter A D E, aliud planum secundum A E superficiem conicam non contingat. Nam secus intersectio ejus cum basi hujus peripheriam secabit; unde & planum ipsum superficiem conicam secabit, contra hyp.

Prop. V. Problema I.

Per rectam A C, per coni verticem A extra superficiem ejus utcunque ductam, Planum ducere quod superficiem conicam contingat. 8.

Per A C agatur utcunque planum, secans basim in G H, Cui recta A C (cum in eodem sit plano) occurret, vel erit parallela;

 1° Occur-

1°. Occurrat in E; à puncto E baseos peripheri contingat ex utravis parte recta E D, Connexa A Erit A D E planum quæsitum.

Transit enim per A C & (per præced.) superficiem conicam contingit.

9. 2°. Sit A C parallela G H; Bissecta G H in M, ectaque ex utravis parte ad G H perpendiculari M factaque D E parallela G H, & connexa A D, Erit iterum A D E planum quæsitum.

Nam (ob A C || G H || D E) erit A C in pla A D E; Cumque sit M D ad G H perpendicularis, D E || G H, Continget D E baseos peripheriam in D unde (per præced.) planum A D E Conicam superficiem continget.

Coroll. Liquet bina tantum plana per A C superficiem conicam contingere; Ex utraque scilicet par plani A G H unum.

Prop. VI. Theor. V.

10. *Recta quævis E D, rectæ cuivis A B per vertice A in ipsa superficie conica ductæ, parallela, modo n sit in plano superficies in A B contingente. Uni tantu superficierum oppositarum, idque in unico puncto occurrit; Hoc est, ex una parte, tota est extra utran que superficiem; Ex altera, tota intra illam continet in qua punctum E situm est.*

Planum per parallelas A B, E D, secet superfici in c A C; Planum B A C, in quo recta E D sita e non occurrit superficiebus, nisi in A B, A C; Rectaq E D (ob parallelismum) non occurrit rectæ A B; O currit tamen necessario rectæ A C alicubi in E, mane que ex una parte puncti E intra angulum B A C, e altera, intra angulum qui est huic deinceps; Unde &

Coroll. Liquet planum per D E plano secundum A superficiem conicam tangenti parallelum, superfici oppositæ non occurrere.

Prop. VII. Theor. VI.

Omnis recta E F, E F, rectæ cuivis A D per verti[ce]m A ductæ, atque intra superficies conicas contentæ, [pa]rallela; utrique superficiei oppositæ occurrit alte[ru]tr[a] E F: Omnisque recta E F, per punctum quodvis [] in utravis superficie ducta, rectæ cuivis per verti[ce]m A D extra superficies cadenti, parallela, Eidem [su]perficiei occurrit in F; Excepto duntaxat casu, ubi [pu]nctum E fuerit in recta A C, secundum quam pla[nu]m per A D superficies contingit. 11. 12.

Per A D & rectam E F transeat planum, secans co[ni]cas superficies in B A b, c A C; quod semper fieri [po]sse, nisi in casu memorato, plus satis manifestum [es]t. Cum A D cadat intra angulum B A C, vel B A c, [r]ecta E F, quæ est ipsi A D parallela, & in eodem cum [ill]à plano, occurret necessario utrique A B, A C ali[cu]bi in E, F; Eritque in priori quidem casu occur[s]um alter F in A B producta; liquet ergo propositum.

Sin punctum E in posteriori casu, sit in recta secun[du]m quam planum per A D superficies conicas con[ti]ngit, manifestum est planum per A D & punctum [E] conicas superficies non secare, & rectam E F ∥ A D [es]se in plano superficies conicas secundum rectam E C contingente. 13.

Coroll. 1. Per Prop. 3. ulterius liquet Rectam E F, [ni]si in punctis E, F, neutri superficierum oppositarum [a]mplius occurrere. 11. 12.

Coroll. 2. Omne planum per E F, in priori casu, se[ca]bit utramque superficiem; Et in posteriori, si per [A] D transeat planum aliquod, extra utramque super[fic]iem cadens, planum per E F huic parallelum, super[fic]iem conicam, in qua punctum B sumptum est, seca[bi]t ex omni parte; superficiei tamen oppositæ non [o]ccurret. 11. 12.

Coroll. 3. Hæc prop. valet conversim, ut manifestum [es]t.

Prop. VIII. Theor. VII.

14. *Si alterutra superficierum oppositarum plano secetur plano baseos parallelo, Erit facta sectio E G F L Circuli circumferentia.*

Secetur Conus utcunque per axem duobus planis, facientibus triangula A B D, A I K, quæ, si opus, producta occurrant plano Sectionis in G H L, E H F; Ob plana parallela, erunt triangula A H F, A C K, uti etiam A H L, A C D similia: Quare

A H : A C :: H L : C D

& A H : A C :: H F : C K ; unde

H L : H F :: C D : C K. Est vero C baseos centrum, Unde C D = C K, ergo & H L = H F. Pari modo ostendetur G H = H F; & similiter in quavis alia intersectione plani E G F L cum plano per axem. Est ergo sectio E G F L circuli circumferentia, cujus centrum H.

Prop. IX. Theor. VIII.

15. *Si Conus scalenus A B C L secetur plano per axem, & ad basim recto, faciente triangulum A B L; Resectoque utcunque ab angulo B A L triangulo A D I, triangulo A L B simili, sed subcontrarie posito, (i. e. ut sit Ang. A L B = A D I) secetur iterum Conus plano per D I, ad trianguli A B L planum recto, Erit facta in superficie conica sectio D K I F circuli circumferentia. Dicitur autem D K I F* Sectio Subcontraria.

Per ipsius D I punctum quodvis G agatur recta E G H, ipsi B L parallela, Per quam transeat planum ad planum trianguli rectum, proindeque basi parallelum, faciens (per præced.) in superficie conica circuli circumferentiam F E K H, planumque per D I secans in recta F G K; Erit (propter planum per axem) recta E H circuli F E K H diameter; Et (propter utriusque sectionis planum ad planum trianguli rectum) erit eorum intersectio K G F ad utramque D G, E G perpen-

perpendicularis; Est itaque (propter circulum) $EG \times GH = GFq = GKq$; Sunt vero (propter Ang. $AID = AEH$, & $DGE = HGI$) triangula DGE, HGI similia; Unde $DG : GH :: EG : GI$; Ergo $DG \times GI = EG \times GH =$ (prius) $GFq = GKq$. Sunt ergo puncta F, K ad circuli peripheriam, cujus diameter DI. Idemque erit de quovis alio puncto in recta DI. Est igitur DKIF Circuli circumferentia.

Prop. X. Theor. IX.

Si in superficie conica, à plano quovis basi non parallelo, fiat sectio D F I K, quæ sit circuli circumferentia, Erit eadem sectio subcontraria. 15.

Planum basi parallelum faciat circulum EKHF, secetque planum circuli DFIK in KGF; sit circuli EKF diameter EGH ad KGF perpendicularis; Transibit hæc per axem, eritque $KG = GF$. Per rectam EGH, & coni axem transeat planum, secans planum circuli DFIK, in DGI, & basim in $BL \parallel EH$; Erit (ob circulos) $EG \times GH = GKq = GFq = DG \times GI$; Ergo $EG : DG :: GI : GH$; Unde Triangula DGE, HGI similia, & ang. $DEG = HIG$. Porro quotcunque circulorum basi parallelorum diametri, quæ sunt in plano per axem & rectas EH, DI, perpendiculares erunt (ob plana parallela) ad respectivas eorum intersectiones cum plano circuli DFIK, easque ideo bisecabunt; Hoc est, recta DI (quæ est in eodem plano per axem) eas omnes bisecabit, & propterea est diameter, & ad easdem perpendicularis; Recta itaque FGK ad utramque DI, HE perpendicularis est; proindeque planum per axem tam ad planum circuli DFIK, (hoc est ad basim,) quam ad planum circuli FGIK rectum est. Unde liquet propositum.

Coroll. Hinc nisi sectio conica sit, vel sectio subcontraria, vel fiat à plano basi parallelo, non erit circuli circumferentia.

Lemma

Lemma 1.

16. *Si duorum planorum ABE, BCE, cum plano aliquo tertio, intersectiones AD, CF sint parallelæ; Erit etiam mutua ipsorum intersectio BE ipsis AD, CF parallela.*

Secentur utcunque hæc tria plana à duobus planis inter se parallelis, quorum intersectiones constituant triangula ACB, DEF; Erunt (ob plana parallela) trianguli ABC latera AC, AB, BC, trianguli DEF lateribus DF, DE, EF, respective parallela; Unde anguli parallelis lateribus contenti erunt æquales: Sed (ob parallelas rectas) AC = DF; adeoque ipsa triangula æqualia, & similia. Ergo CB = FE, ac propterea BE || CF || AD.

Definitiones.

17. 1. Si Conus ABC plano ADE utcunque per verticem sectus, rursus plano secetur plano ADE parallelo; Erit facta in illius superficie sectio FGH HYPERBOLA; cujus planum productum, superficiei oppositæ occurrens, faciet ejusdem nominis sectionem fhg; Hæ vero binæ conjunctim *sectiones oppositæ* vocantur.

18. 2. Si per Coni verticem A, extraque illius superficiem, (hoc est illam nec secans nec tangens) transeat utcunque planum DAE; Seceturque iterum conus plano, plano ad DAE planum parallelo, Facta in illius superficie sectio FHG ELLIPSIS dicitur.

19. 3. Quod si planum ADE coni superficiem contingat, seceturque conus plano, plano ADE parallelo, Facta in illius superficie sectio FHG dicitur PARABOLA.

Coroll. 1. Hyperbola, & Parabola (cum conum in circuitu non secent) spatium non claudunt, & continuato Cono, simul in infinitum continuantur. Ellipsis vero

vero Conum ambit, & in se revoluta spatium undique claudit.

Coroll. 2. Liquet Circuli circumferentiam Ellipsibus esse annumerandam. Nam si planum D A E per verticem sit plano basis, vel sectionis subcontrariæ parallelum; Planum huic parallelum faciet in superficie conica Circuli circumferentiam. Ideoque sub nomine vel sectionis conicæ in genere, vel Ellipseos in specie, etiam Circuli circumferentiam comprehensam intelligat lector. Quod semel monitum sufficiat.

Coroll. 3. Recta conjungens bina quæcunque puncta in sectione Conica, tota cadit intra sectionem, productaque utrinque extra eandem cadit, neque ei aut sectioni oppositæ amplius occurrit.

Coroll. 4. Conjungens bina puncta, in oppositis sectionibus sumpta, cadit extra sectiones; productaque utrinque intra utramque deinceps continetur, Neutrique earum amplius occurrit. Patet per prop. 3.

Coroll. 5. Unde Recta linea sectioni conicæ, vel sect. opp. in pluribus quam duobus punctis non occurrit.

Prop. XI. Theor. X.

Communis intersectio I L plani alicujus A M N, superficiem conicam tangentis, cum plano sectionis conicæ F I G, sectionem contingit, i. e. tota extra sectionem cadit. 20.

Nam si I L secet sectionem; planum A M N secabit conicam superficiem contra hypothesin.

Coroll. 1. Præter I L alia recta in puncto I sectionem non contingit. Nam erit hujusmodi recta necessario in alio plano per A M, ab A M N diverso; quod (per *Coroll.* 3. prop. 4.) Conum non contingit, i. e. secat, proindeque hæc recta sectionem secabit. 20.

Coroll. 2. Duæ quælibet I L, M N Hyperbolam vel parabolam contingentes, necessario concurrunt. Nam iisdem manentibus quæ in definitionibus; si dicantur parallelæ, erit planorum A I L, A M N contingentes 21. 22.

 forman-

formantium intersectio A B (per *Lemma* 1.) ipsis I L, M N parallela, ideoque in ipso plano A D E, quod sectionis plano est parallelum. Sed in hyperbola (per *Coroll.* prop. 5.) aliud adhuc planum per A B (nempe ex altera parte plani A D E) potest conum contingere; Et in Parabola ipsum A E D conum contingit; Tria igitur plana per unam eandemque rectam A B Conum contingunt, quod (per *Coroll.* prop. 5.) est absurdum.

23. *Coroll.* 3. In Ellipsi vero & oppositis sectionibus,
24. Contingenti cuivis I L, erit alia aliqua contingens *i l* parallela. Sit A B recta secundum quam planum A I L secat planum D A E; si per A B agatur aliud planum (per prop. 5.) tangens conicas superficies, formabit hoc contingentem *i l*; Estque (ob plana parallela) A B || I L, unde I L || *i l*. Contingens vero à plano per aliam quamvis rectam in plano A I L formata, contingenti I L concurret, ut advertenti facile patebit.

Coroll. 4. Contingens Hyperbolam sectioni oppositæ non occurrit. Nam (per *Coroll.* 4. post definitiones præced.) secaret utramque sectionem contra hypothesin.

Coroll. 5. Rectæ parallelæ duabus plures, Ellipsin vel Sectiones opp. non contingunt. Secus plana per eandem rectam per verticem, duobus plura, conum contingerent.

Prop. XII. Theor. XI.

25. *Iisdem positis quæ in definitionibus præcedentibus;*
26. *In utravis sectionum oppositarum, recta quævis I K facta à plano per utramvis A D, vel A E, & punctum quodvis I in Sectione, ducto, planumque sectionis in I K secante, in unico hoc puncto I sectioni occurrit; & ex una parte, tota intra sectionem continetur; ex altera vero manet tota extra utramque sectionum oppositarum. Similiter, in Parabola, recta I K facta à plano per A E, & punctum quodvis I in sectione, ducto, sectioni in unico*

unico hoc puncto I occurrit; manetque ex una parte intra, ex altera extra sectionem.

2. *At præter istiusmodi rectas* I K, *Quævis alia* I L *per punctum quodvis* I *in sectione, in plano sectionis, ducta, Sectioni, vel sectionibus oppositis in binis punctis* I, L *occurrit, vel sectionem contingit.*

Ob plana parallela erit I K || A D, vel A E; unde patet pars 1 per prop. *6*.

2. Cum (ob plana parallela) rectæ omnes I K sint rectæ A E, vel A D, & sibi invicem parallelæ; recta I L non erit ipsi A D, vel A E parallela; Proindeque planum per I L & coni verticem, non secabit planum A D E, in A D, vel A E, sed alias in A B, quæ in hyperbola quidem potest cadere vel intra Ang. D A B, id est intra superficies Conicas; quo in casu (per prop. *7*.) recta I L huic parallela, occurret superficiei oppositæ, hoc est, occurret Sectioni oppositæ: Vel extra; quo in casu (per eandem prop.) occurret denuo eidem sectioni, vel erit in plano superficiem contingente, i. e. Sectionem continget.

In Parabola erit A B semper extra superficies conicas; Unde I L vel sectioni denuo occurret, vel eandem continget.

In Ellipsi, per se manifestum est rectam I L per punctum quodvis in sectione I ductam eidem denuo occurre, vel saltem sectionem in eodem puncto I contingere. 27.

Prop. XIII. Theor. XII.

In omni sectione conica, vel Sectionibus oppositis, recta linea BC in plano sectionis, per punctum quodvis B in Sectione, vel utravis sectionum oppositarum ducta, rectæ I L Sectionem, vel utramvis Sectionum oppositarum in I contingenti, vel eidem in binis punctis I, L occurrenti, parallela, Sectioni denuo occurrit in C, vel saltem sectionem, vel sectionem ei, in qua est punctum I, vel puncta I, L oppositam, continget. 28. 29. 30. 31.

In Ellipsi per se manifesta est propositio; Sed in

 omnibus

omnibus patet ex prop. 7. Nam recta I L erit necessario rectæ per verticem coni extra superficies cadenti parallela.

Vel aliter in Hyperb. vel opp. sect. & parab. Per I intelligatur I K eadem, quæ in prop. præcedenti. Rectæ I L, IK necessario angulum efficient; Ergo B C || I L non erit parallela I K unde, (per præced.) liquet propositum.

Nota. Si recta I L sit contingens, Recta B C parabolam vel ex oppositis Sectionibus illam, in qua est punctum I, non continget. Nam parabolam vel hyperbolam parallelæ rectæ non contingunt. Ellipsim vel hyperbolam oppositam omnino potest contingere.

Prop. XIV. Theor. XIII.

32. *Positis iis, quæ in Hyperbolæ & oppositarum sectionum definitione; Si duo plana A D I, A E K superficies conicas secundum D A d, E Ae tangentia, planum sectionum productum secent in rectis I M i, K M k; Dico rectas I M I, K M k quantumvis productas neutri sectionum oppositarum occurrere.*

Nam superficies conicæ, (in quibus sectiones sitæ sunt) & plana tangentia (in quibus sunt rectæ I M i K M k) sibi mutuo non occurrunt, nisi in rectis D A d, E A e, quæ (ob plana parallela) sunt extra planum sectionum: Igitur rectæ I M i, K M k sectionibus non occurrunt.

Def. Petito ex re nomine, hæ rectæ vocantur *Asymptoti.*

32. *Coroll.* 1. Omnis recta A B, in plano sectionum op-
33. positarum utrivis asymptoto parallela, uni sectionum oppositarum idque in unico puncto B occurrit. Nam in cono hujusmodi recta utrivis I M vel K M parallela erit (ob plana parallela) etiam rectæ D A, vel E A parallela unde liquet per prop. 6. vel 12.

32. *Coroll.* 2. Omnis recta M C, per asymptoton occur-
33. sum M, intra angulum I M K ducta; Atque omnis

recta

recta D E, quæ ad plagas sectionum oppositarum secat utramque asymptoton, producta utrique sectionum oppositarum occurret. Nam in cono erunt necessario parallelæ rectis aliquibus in plano D A E, intra Ang. D A E cadentibus unde patet per prop. 7.

Coroll. 3. Recta O H N hyperbolam utcunque in H 34.
contingens, producta utrique asympto occurret in O, N, extra earum occursum M, & ad easdem partes cum sectione. Nam si dicatur eam transire per M, vel eas ad plagas oppositas secare, vel esse earum alteri parallelam, per jam ostensa secabit sectionem; Restatque solummodo casus propositus.

Coroll. 4. Unde quæ binæ O H N, A B C eandem 35.
hyperbolam contingunt, concurrunt necessario in D, intra angulum O M N asymptotis contentum. Quæ vero O H N, a b c oppositas sectiones contingunt, concurrunt intra Ang. a M N, vel c M O qui est angulo O M N deinceps; Vel saltem sunt inter se parallelæ.

Coroll. 5. Recta B C conjungens bina puncta in se- 36.
ctione B C, utrique asymptoto occurret ad easdem partes cum sectione; Nam asymptoton alteri, necessario occurrit, sit illa M D; Ducta C F || M G; Erit (per *Coroll.* 1. huj.) punctum B extra rectam C F; Unde B C cum C F angulum efficit. proindeque huic parallelæ M G occurret alicubi in A; at non erit A in G M producta ultra M, alias C B (per *Coroll.* 2.) occurreret sectioni oppositæ, quod (per *Coroll.* 3. post sectionum definitiones) fieri nequit.

Coroll. 6. Hyperbola & asymptoti licet quantumvis 37.
productæ non occurrant, propius tamen ad se invicem accedunt quam pro dato quovis intervallo. Dato ab utravis asymptoto M A intervallo A B, ductaque B D eidem asymptoto parallela, secabit hæc (per *Coroll.* 1.) Sectionem alicubi in C; Unde liquet propositum.

Coroll. 7. Ex jam ostensis hoc quoque est manifestum, 34.
Pro vario situ puncti H (in *Coroll.* 3.) respectu puncti M, punctorum N O alterum ad punctum M accedere recedente altero, prout ad has vel illas partes pun-

 ctum

ctum H abierit; At vero eorum neutrum prius puncto M coincidere, quam punctum contactus H ad distantiam infinitam migraverit; Quo in casu contingens OHN in asymptoton degenerat; Vel quod idem est, Asymptotos ad punctum ab M infinite distans sectionem contingit.

Lemma 2.

38. *Iisdem positis, quæ in præcedentibus, sit* IFGK *plani hyperbolæ, vel sectionum oppositarum intersectio cum plano basis, vel (quod perinde est) cum plano quolibet huic parallelo, occurrens asymptotis in* I, K *sectioni vero in* F, G; *Si per punctum quodvis in utravis sectionum oppositarum* H *agatur recta* OHN, *rectæ* IK *parallela, asymptotis occurrens in* O, N, *& sectioni denuo in* R, *vel eandem forte tantum in* H *contingens; Dico* IF×FK=KG×GI=OH×HN=NR×RO.

Plana per IK, & ON basi parallela, facient in superficie conica circulorum circumferentias DFGE, PHRQ, quas eorundem planorum intersectiones cum planis asymptotos formantibus, *viz.* DI, EK, PO, QN contingent in DEPQ, & ob plana parallela erit DI=PO & EK=QN; Si contingentes coeant in L, l, erit ex elementis LE=LD, lQ=lP ductaque diametro LST, bisecabit hæc parallelas DE, FG in ST, & ob DE bisectam in S, erit etiam (ob sim. triang.) IK bisecta in T; unde IF=GK, *i.e.* IG=FK: Eodem modo erit OH=RN, *i.e.* OR =HN; unde DIq= (ob circulum) IF×IG=IF ×FK=KG×GI= (prius) POq= (ob circulum) OH×OR=OH×HN=NR×RO. Haud multo aliter ratiocinabere si DE, EK sint parallelæ.

Supple figuram hujus casus. Si OH contingat hyperbolam, continget & circulum unde erit PO=OH=QP=HN ideoque DIq =IF×FK=POq=OHq=OH×HN.

Prop. XV.

Prop. XV. Theor. XIV.

Si binæ quælibet rectæ inter se parallelæ, & vel utraque ad eandem Sectionem, vel utraque ad oppositas, vel singulæ ad singulas, utrinque in punctis B C F G *terminatæ; vel quarum una vel utraque sectionem vel sectiones oppositas contingit in* C G, *si opus productæ utrique asymptoto occurrant in* A D, E H: *Dico rectangula omnia* A B x B D, E F x F H, C D x C A, G H x G E *esse sibi invicem æqualia.* 39. 40.

Si hæ rectæ parallelæ sint intersectioni plani sectionis cum plano basis, propositio non differt à lemmate præcedenti; Sin minus, per punctorum B C G F bina quælibet ex. gr. C, G agantur ad asymptotos usque rectæ I C K, L G Q, quæ intersectionis sectionis cum plano basis (aut huic parallelo) parallelæ intelligantur; Erunt itaque (ob rectas parallelas) triangula D G K, H G Q similia; uti etiam I C A, L G E Unde

I C : C A :: L G : G E &

C K : C D :: G Q : G H ductisque in se ordinatim antecedentibus & consequentibus, erit I C x C K : C A x C D :: L G x G Q : G E x G H. sed I C x C K = (per lemma præced.) L G x G Q; Ergo C A x C D = G E x G H. Pari omnino modo (Actis per reliqua puncta B, F rectis, ipsis A C K, L G Q parallelis) demonstrabitur A B x B D = C D x D A = E F x F H, &c.

Coroll. 1. Hinc C D = B A, nam 39. 40.

$$\left.\begin{array}{l} AB \times BD \\ AB \times BC + AB \times CD \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} CD \times CA \\ CD \times BC + DC \times AB, \end{array}\right.$$

demptoque communi, erit A B x B C = C D x B C, *i. e.* A B = C D. Eodem modo E F = G H.

Coroll. 2. Unde A B x A C = A B x B D = E F x F H = E F x E G. &c. 39. 40.

Coroll. 3. Recta A C D sectionem in C contingens, & ad asymptotos in A, D terminata à contactu C bisecatur. 41.

Nam A B ubique = C D; & in hoc casu coincidunt 42.

puncta,

puncta, B C. Similiter si B C ad sectiones oppositas terminata per asymptoton occursum transeat, ibidem bisecabitur. Nam C D ubique $=$ A B, *i. e.* C A $=$ D B; & in hoc casu coincidunt A, D.

41. *Coroll.* 4. Unde in casibus Corollarii 3^{ii} E F $\times$ F H $=$ A C q $=$ C D q &c. Scilicet si A C D sit contingens.
42. Sin per asymptoton occursum transeat, Erit E F $\times$ F H $=$ D B q &c.

Coroll. 5. Coroll. 3^{m}. valet conversim. Nempe si recta A C D ad asymptotos in A D terminata & sectioni occurrens in C ibidem bisecetur, eadem sectionem in C continget. Nam si dicatur sectioni denuo occurrere in B, erit A C $=$ B D $=$ C D, hoc est, punctum B non
43. erit à puncto C diversum. Similiter si C B ad asymptoton in C bisecetur erit C communis asymptoton occursus. Patet fere ut pars prior.

44. *Coroll.* 6. Binæ rectæ sectiones oppositas contingentes inter se parallelæ & ad asymptoton terminatæ d c a, D C A sunt æquales. Nam d c $\times$ c a $=$ D C $\times$ C A & d c $=$ c a, D C $=$ C A.

Coroll. 7. Conjungens tactus contingentium parallelarum per asymptoton occursum M transit. Nam Triangula M D A, M d a sunt similia, & A C $= \frac{1}{2}$ A D $=$ C D $=$ d c $=$ c a; unde satis liquet propositum.

Lemma 3.

45. *In Recta* A D *facta utcunque* A B $=$ C D, *sumpto-*
46. *que in eadem alio quovis puncto* E; *Si* E *cadat inter*
47. B, *&* C, *dico*

$$BE \times EC = AE \times ED - AC \times CD \text{ vel}$$

$$BE \times EC + AC \times CD = AE \times ED \text{ vel \&c}$$

2. *Si* E *cadat inter* C, *&* D, *vel* (*quod eodem redit*) *inter* A, *&* B, *erit*

$$BE \times EC = AC \times CD - AE \times ED \text{ vel}$$

$$BE \times EC + AE \times ED = AC \times CD \text{ \&c.}$$

3. *Si*

3. *Si* E *sit in* AD *producta, erit*

$BE \times EC = AE \times ED + AC \times CD$ *vel*

$BE \times EC - AE \times ED = AC \times CD$ *&c.*

Nam in primo casu

$$AE \times ED = AB \times EC + AB \times CD + BE \times EC + BE \times CD$$

$$AC \times CD = AB \times CD + BE \times CD + \begin{cases} EC \times CD \\ AB \times EC \end{cases}$$

Unde $AE \times ED - AC \times CD = BE \times EC$.

Similiter ex partium collatione patet in reliquis casibus.

Scholium.

Coincidentibus punctis B D, in primo casu coincidit his punctum E, & evanescit $B E \times E C$. 48.

Coincidentibus vero iisdem B, C, transit casus Secundus in illum 5, El. 2, Tertius in 6, El. 2, ut cuivis obvium. 49.

Prop. XVI. Theor. XV.

In Hyperbola & sectionibus oppositis, si binæ quælibet rectæ K N, S T, *vel utraque ad eandem sectionem, vel utraque ad oppositas, vel singulæ ad singulas, vel altera ad eandem, altera ad oppositas utrinque terminatæ, & si opus productæ, sibi mutuo occurrant in* E, *& utrique asymptoto in* R, V, M, L *punctis; Dico* 50. 51. 52. 53. 54. 55.

$$\left.\begin{array}{l} KM \times MN \\ LN \times MN \end{array}\right\} : RT \times TV :: KE \times EN : SE \times ET.$$

2. *Idem erit de quadratis hujusmodi rectarum quoties earum una, vel utraque sectionem vel sectiones oppositas contingit, vel harum una per asymptoton occursum transit.* 56. 57. 58. 59.

Per utriusvis rectarum N K utrumlibet occursum cum sectione N, agatur recta X N Y, rectæ alteri S T parallela, asymptotis occurrens in X Y; erunt triangula L N Y, L E R similia, uti etiam M N X, M E V; Unde 50. 51. 52. &c.

$LE : LN :: ER : NY$

$ME : MN :: EV : NX$. Ductisque &c.

$LE \times ME : LN \times MN :: ER \times EV : NY \times NX$ id est

 (per

(per lemma præced.) pro vario situ puncti E, & pe[r] prop. 15. cum *Coroll.* 2.

$$\left.\begin{array}{l} KE\times EN+KM\times MN \\ KM\times MN-KE\times EN \\ KE\times EN-KM\times MN \end{array}\right\} : \left\{\begin{array}{c} LN\times MN \\ \text{id est} \\ KM\times MN \end{array}\right\} :: \left\{\begin{array}{l} SE\times ET+RT\times TV \\ RT\times TV-SE\times ET \\ SE\times ET-RT\times TV \end{array}\right\} : \left\{\begin{array}{c} NY\times NX \\ \text{id est} \\ RT\times TV \end{array}\right.$$

Unde in primo & secundo casu div. in tertio comp. $KE\times EN:KM\times MN::SE\times ET:RT\times TV$, unde alternando liquet propositum.

Pars 2da revera non differt à priore, eademque demonstratio huic inservit, si occursus K & N; T & S, in recta contingente; Vel R & V, vel M & N in recta per asymptoton occursum transeunte, (qui in figuris partis primæ bini sunt) in unum coire intelligantur; Unde cum in casu partis 1æ. sit $KN\times MN:RT\times TV::KE\times EN:SE\times ET$ erit in casu hujus partis secundæ

57. 58. $KMq:RT\times TV::KEq:SE\times ET$.

59. 60. $KMq:RT\times TV::KEq:TEq$.

$KMq:RT\times TV::KE\times EN:SE\times ET$,

& sic in cæteris casibus.

Nota. Coeuntibus punctis K,N; S,T &c. Lemma præcedens in hac demonstratione adhibitum non differt a 5, vel 6, e 2, ut supra est adnotatum.

Nota. Utrinsque hujus prop. partis non omnes casus figuris expressimus; Ut habeat lector quo se exerceat, & ne figurarum numerus in immensum crescat.

Coroll. Si angulus asymptoton sit rectus, & rectarum una KN, parallela sit, vel coincidat rectæ alicui ACB per asymptoton occursum C transeunti, altera vero ST parallela rectæ DB in occursu rectæ AB unam sectionum oppositarum contingenti, Erit $KE\times EN = SE\times ET$. Nam ob ang. rect. & $DB=BI$, erit per 31. El. 3tii. $CBq=DBq$, & (per *Coroll.* 4. prop. 15.) $RT\times TV=DBq$, & $KM\times MN= CBq$; unde liquet propositum. Si coeant puncta S, T; *i. e.* si recta SET contingenti BD coincidat, erit $TEq=KE\times EN$ &c.

Prop. XVII.

Prop. XVII. Theor. XVI.

In Hyperbola & Sectionibus oppositis si Recta quævis AB *ad eandem, vel ad oppositas sectiones utrinque terminata, & si opus producta; Vel binæ quælibet rectæ* AB, CD *inter se parallelæ, & vel utraque ad eandem sectionem, vel utraque ad oppositas, vel singulæ ad singulas utrinque terminatæ, & si opus productæ, Binis quibuscunque* FG, IH *inter se parallelis, & vel utrisque ad eandem sectionem, vel utrisque ad oppositas, vel singulis ad singulas utrinque terminatis, & si opus productis utcunque occurrant, ut in* E, T, *vel* E, T, S, V *punctis, Erunt rectangula ex segmentis ejusdem rectæ, vel binarum inter se parallelarum, proportionalia rectangulis ex segmentis binarum reliquarum, modo sumantur rectangula à binis communibus punctis facta.* Viz. 61. 62. 63. 64. *Supple figuras reliquarum casuum.*

$$AE \times EB : GE \times EF :: AT \times TB : IT \times TH \ \&$$
$$AE \times EB : GE \times EF :: CV \times VD : HV \times VI$$

& sic de cæteris punctis.

2. *Idem intellige de quadratis contingentium quoties rectarum propositarum una vel plures sectionem vel sectiones contingunt tantum scilicet* 65. *Supple figuras reliquarum casuum.*

$$DVq : VI \times VH :: DSq : SGq \ \&$$
$$GEq : AE \times EB :: IT \times TH : AT \times TB$$ *& sic de cæteris punctis,*

Rectæ omnes (si opus productæ) occurrant asymptotis in O, P, Q, R &c. ut in figuris, Erit ex præcedenti N

$$AE \times EB : GE \times EF :: AO \times OB : GK \times KF$$
$$\& \ AT \times TB : IT \times TH :: AO \times OB \begin{Bmatrix} HM \times MI \\ GK \times KF \end{Bmatrix}$$

Unde $AE \times EB : GE \times EF :: AT \times TB : IT \times TH$.
Pari modo ob $AO \times OB = CQ \times QD$ & $GK \times KF = HM \times MI$ probabitur

$$AE \times EB : GE \times EF :: CV \times VD : HV \times VI.$$

 Nec

Nec aliter rationabere de cæteris punctis, & in omnibus casibus.

2. Cum hæc propositio pendeat solummodo ex priore, eadem erit ratio quadratorum ex rectis contingentibus ut inde manifestum.

66. 67. *Coroll.* Hinc si recta quævis A B utrivis asymptoto parallela, ideoque uni tantum sectionum oppositarum occurrens in A, Binis F G, I H inter se parallelis, & utrisque ad sectionem vel utrisque ad sectiones oppositas, vel singulis ad singulas in F, G, I, H, terminatis, (si opus productis) occurrat in E, T; Erit F E x E G : I T x TH : : AE : AT pariterque in contingentium.

Nam recta A B in quavis alia ipsius positione, ad eandem vel ad sectionem oppositam etiam in b terminabitur, eritque A e x e b : A t x t b : : G e x e F ; H t x t I jam in nostro casu puncto b in infinitum abeunte, coincidentibus t, e ipsis T, E, Infinitorum T B, E B differentia finita T E ipsarum respectu erit nulla, hoc est T B = E B, unde A E x E B : A T x T B : : A E : A T : : G E x E F : H T x T I vel T I q &c.

Vide figuram in Tab. 13. Aliter. Sit asymptoton occursus B & connectatur B A, Per puncta T E ipsi B A parallelæ agantur D T S, K E N, quæ occurrent necessario utrique asymptoto in D, S; K, N adeoque (per Coroll. 2. prop. 14.) utrique sectionum oppositarum in O, P; L, M; sint vero K, D puncta in asymptoto ipsi A E T parallela.

Erit (ob parallelas rectas) A B = D T = K E & B K = A E, B D = A T.

Porro ex hac prop. 17. & ex lemmate 3. erit in casu figuræ in Tab. 13.

$$HT \times TI : GE \times EF : : \left\{\begin{matrix} OT \times TP \\ DT \times TS + OS \times SP \\ AB \times TS + ABq \end{matrix}\right\} : \left\{\begin{matrix} LE \times EM \\ KE \times EN + LN \times NM \\ AB \times EN + ABq \end{matrix}\right\}$$

$$: : \left\{\begin{matrix} TS + AB \\ DS \end{matrix}\right\} : \left\{\begin{matrix} EN + AB \\ NK \end{matrix}\right\} : : (\text{ob sim. triang.}) \left\{\begin{matrix} DB \\ TA \end{matrix}\right\} : \left\{\begin{matrix} KB \\ EA \end{matrix}\right.$$

Nec aliter in casu contactus.

Eodem modo per Lemma 3. (pro vario situ punctorum T, E, mutatis mutandis patebit in omnibus casibus.

Prop.

Prop. XVIII. Theor. XVII.

Quæ in Hyperbola, & sectionibus oppositis superiori propositione ostendimus, propositum sit nobis in Ellipsi & Parabola ostendere. Scilicet (positis ut prius) 68, 69. 70. *Supple reliquos casus.*

GO×GR : LE×EM :: HG×GF : HE×EF

GO×GR : HG×GF :: LX×XM : ZX×XY

& sic de binis quibusvis punctis.

Vel si rectarum aliquæ sint contingentes, 71, 72.

LEq : LXq :: EH×EF : XZ×XY *Supple reliquos casus.*

LXq XYq :: &c. VO×VR : VYq

In Ellipsi, vel Parabola in Conica superficie facta, sint rectæ eædem quæ in figuris 68, 69. &c. neglecta tantum in præsens recta ZY. 73.

Per rectarum RO, LM alterutram RO, & coni verticem I transeat planum RIO, secans superficies conicas in rectis IR, IO; Secundum quas plana IRK, ION superficies contingant, se mutuo secantia in IT, & planum sectionis in RK, ON. *Vide fig. Parabola in Tab. 13. & supple casus omissos.*

Per LM transeat planum, plano RIO parallelum, faciens sectiones oppositas LDMAS, secansque plana tangentia in rectis TK, TN, quæ erunt propterea asymptoti.

Per HF & coni verticem I transeat planum, secans superficies conicas in rectis HIA, IDF, planum RIO in IG, planum sectionum in ABCDE, planaque asymptotos formantia in IB, IC.

Recta AD est ad alteram sive utramque sectionum oppositarum in AD terminata occurritque asymptotis in B, C.

Per punctum D, in plano sectionum oppositarum agatur usque ad asymptotos recta PDQ parallela KLEMN.

Ob plana parallela, & rectas parallelas PDQ, KLEMN, similia erunt triangula RGI, & PDB; GIO, & DCQ. Pariter HIG & HAE; FDE, & FIG, Unde

$$IG : DE :: GF : FE \ \&$$
$$IG : AE :: HG : HE$$ Ductisque &c.
$$IGq : AE \times DE :: HG \times GF : HE \times FE.$$ Rursum
$$IG : GO :: CD : DQ$$
$$IG : GR :: BD : DP$$ Ductisque &c.
$$IGq : GO \times GR :: CD \times BD : \begin{Bmatrix} DQ \times DP \\ KM \times MN \end{Bmatrix}$$
:: (per prop. 15.) $AE \times ED : LE \times EM$ & altern.
$IGq : AE \times ED :: GO \times GR : LE \times EM ::$ (prius) $HG \times GF : HE \times FE$.

68, 69. 70, 71. 72. *Supple reliquos casus.* 2. Erit $RG \times GO : HG \times GF :: LX \times XM : ZX \times XY$
Nam per priorem partem
$$RG \times GO : HG \times GF :: LE \times EM : HE \times EF$$
& pari ratione
$$LE \times EM : HE \times EF :: LX \times XM : ZX \times YX$$
unde
$$RG \times GO : HG \times GF :: LX \times XM : ZX \times YX$$
Pariter de punctis E, V. Nec aliter in rectis contingentibus.

74. *Coroll.* In Parabola, si recta quævis FH ex iis quæ (juxta prop. 12.) in unico puncto F sectioni occurrunt, binis RO, LM inter se parallelis, & utrinque ad sectionem in R, O, L, M terminatis, occurrat in G, E; Erit
$$FG : FE :: GO \times OR : LE \times EM.$$

Vide fig. in Tab. 13. & fig. 26. supra. Nam (factis ut priùs) cum recta FH respondeat rectæ IK in fig. prop. 12. pro Parabola, recta IA quæ fit à plano per rectam FH & verticem I respondebit rectæ AD in eadem figura, hoc est, erit FH parallela IA unde $IG = AE$.
Estque ob sim. triang.
$$FG : FE :: IG : DE :: IGq : IG \times DE = AE \times DE$$
ostendetur verò ut supra
$IGq : AE \times DE :: GO \times GR : LE \times EM$ unde $FG : FE :: GO \times OR : LE \times EM$. Pariterque in casu contactus.

Patet etiam ut coroll. præced. ob FH in hoc casu infinitam.

Schol.

Scholium. Theorema hoc cum præcedenti & eorum orollariis licuisset simul una propositione complecti, ademque opera (sed via diversa) è cono demonrasse: Cum tamen in hyperbola & sectionibus opp. hæc proprietas etiam in plano se proderet, quo Tyronibus aliquatenus consultum esset, libuit seorsim demonstrare.

SECTIO

SECTIO II.

Prop. XIX. Theor. XVIII.

Recta OHN, QKR spectant ad prop. seq. sequentem.

75. 76. 77. 78. *IN omni Sectione conica, & Sectionibus oppositis, si binæ rectæ* BI, CI *contingentes sectionem, vel sectiones oppositas in extremis rectæ cujusvis* BC, *sectioni, vel sect. opp. in binis punctis* B, C *occurrentis, concurrant in* I, (*vel in Ellipsi & sect. opp. sint forte inter se parallelæ*) *& ex utravis parte tactus conjungentis* BC *ducatur recta* EF, *ipsi* BC *parallela, quæ, si opus producta occurrat sectioni, vel sectioni oppositæ, vel utrique sectionum oppositarum in binis punctis* EF, *& rectis contingentibus in* D, G; *Dico* DE = FG.

79. *Pro Hyperb. Parab. & Ellipsi. Supple figuram sect. opp.*

Facta in superficie conica sectione, vel sectionibus oppositis, positisque ut in figuris. Per coni verticem A ducantur AB, AC; Plana per rectas AB, BI & AC, CI ~~superficiem contingent.~~

Per DEFG transeat planum plano ABC parallelum, faciens sectionem vel sectiones EKF, & secans plana tangentia in DH, HG; Erit EKF hyperbola, vel sectiones oppositæ, eruntque HD, HG asymptoti ac proinde DE = FG.

Coroll. 1. DF = GE.

Coroll. 2. Si (coeuntibus punctis E, F,) recta DG sectionem contingat, à tactu bisecabitur. Si vero puncta EF sint ad sectiones oppositas, recta DG in contingentem abire non potest, ut ex supra dictis manifestum.

Prop. XX. Theor. XIX.

75. 76. 77. 78. *Iisdem positis, Si per contingentium occursum* I, *& medium punctum* M *tactus conjungentis* BC, *ducatur recta*

recta I M, *vel si contingentes sint parallelæ, per* M *ducatur* I M *ipsis contingentibus parallela, Hæc rectas omnes* E F *ipsi* B C *parallelas, & ad sectionem, vel sectiones oppositas utrinque terminatas bifariam secabit.* Supple figuras contingentium parallelarum.

Nam ob similia triang. I B C, I D G & B M = M C, erit etiam D L = L G, estque (per præced.) D E = F G, & D F = G E, unde additis vel demptis æqualibus erit L E = L F.

Si contingentes sint parallelæ, erit B M = D L = M C = L G &c. ut prius.

Def. Rectæ I M hoc modo genitæ, atque infinite extensæ *Diametri* appellantur.

Ipsæ vero M C, vel M B, atque omnes his parallelæ L G, vel L E, intra sectionem, vel inter sectiones oppositas, dicuntur *Ordinatæ* ad diametrum I M.

Coroll. 1. Ob ordinatas sic bisectas in Hyperbola, & Parabola, (quarum curvæ post B C infinite se utrinque extendunt) diameter in unico tantum puncto H sectioni occurrit; In hyperbola tamen occurret, eadem de causa, sectioni oppositæ in K. Ellipsi occurret in binis punctis H, K. Inter sectiones oppositas neutri earum omnino occurrit.

Def. In Hyperbola, vel Sect. opp. & Ellipsi, Diametri infinite extensæ pars H K *Diameter transversa* dicitur. 75. 76.

Et in omnibus sectionibus punctum H, vel K *Vertex* dicitur; Et in opp. Sect. & Ellipsi dicitur vertex K vertici H *Oppositus*, vel vicissim.

In oppositis sectionibus Diametri H K utrique sectioni occurrentes vocantur Diametri *Determinatæ*; Diametri vero inter sectiones *Indeterminatæ*. Utriusque nominis ratio in aperto est. 78.

In omnibus sectionibus partes H M, H L, vel K M, K L vocantur *Diametri interceptæ* vel *abscissæ*. 75. 76. 77.

Coroll. 2. In Hyperbola & Ellipsi, cum sit B M × M C = M C q, F L × L F = L F q erit (per prop. 17. & 18.) K M × M H : K L × L H :: M C q : L F q. Et sic ubique.

77. *Coroll.* 3. In Parabola, cum Diametri in unico tantum puncto H sectioni occurrant, liquet (per prop. 12.) eas non diversas esse à rectis I K factis à plano per contactum A D, planumque sectionis in I K secante; adeoque (ob planum A D E plano sectionis parallelum,) esse omnes inter se parallelas; Et porro idem præstare, quod eædem rectæ I K in Corollario prop. 18.

In fig. prop. 12 pro Parabola.

77. *Coroll.* 4. Et propter ordinatas bisectas, (per coroll. prop. 18.) Erit in Parabola

H M : H L :: M Cq : L F q; Et sic ubique.

76. *Coroll.* 5. Per *Coroll.* 2. liquet ordinatas ad quamlibet diametrum in Ellipsi, quo magis ab utroque vertice distant, eo majores esse, donec ad medium diametri punctum veniatur, eritque ordinata per hoc punctum maxima. Et quæ binæ æqualiter ab utroque vertice distant sunt æquales; Et conversim. Ita enim se res habet in rectangulis ex segmentis diametri, quibus ordinatarum conterminarum quadrata proportionalia sunt.

75. 77. *Coroll.* 6. Similiter in Hyperbola & Parabola, quo longius ordinatæ ab diametri vertice distant, eo sunt majores. Et in oppositis sectionibus, quæ binæ æqualiter ab utroque ejus vertice distant, sunt æquales; Et conversim.

75. 77. *Coroll.* 7. In Hyperbola & Parabola, quarum curvæ infinite se extendunt, fiunt tandem ordinatæ data quavis recta majores. Detur A K, si fiat in Hyperbola M C q : K M × M H $\sqsubset$ A K q : L H × K L erit (propter *Coroll.* 2.) L F $\sqsubset$ A K. Eodem modo (mutatis mutandis) liquet in Parab. per *Coroll.* 4. Unde porro recta diametro cuivis parallela, sectioni, vel utrique sectionum oppositarum necessario occurret.

75. 76. 77. *Coroll.* 8. In omni sectione, Quæ H N, vel K P per verticem H, vel K ducitur ordinatis parallela, Sectionem continget; Et conversim. Nam si aliqua ejus pars sit intra sectionem, à diametro bisecabitur, quæ tamen huic non occurrit nisi in ipsa sectione. 2. Si contingat erit parallela. Nam binæ rectæ diversæ in eodem puncto non contingunt.

Coroll.

Coroll. 9. In Ellipsi & Sectionibus oppositis, Recta HK conjungens tactus contingentium parallelarum est *diameter*, rectarum BC, EF hisce contingentibus parallelarum. Nam si quævis alia VR dicatur earum diameter, rectæ in ejusdem extremis V, R, rectis BC, FE parallelæ, (per præced. *Coroll.*) sectionem contingent, unde aut plures duabus rectis parallelis sectionem, vel sect. opp. contingent, contra *Coroll.* 5. prop. 11, aut non erit VR ab HK diversa. 80. 81.

Coroll. 10. In omni sectione conica, & in sect. opp. & inter sect. opp. Quæ binas rectas inter se parallelas, vel utrasque ad eandem sectionem, vel utrasque ad oppositas, vel singulas ad singulas utrinque terminatas, bisecat, erit harum, atque omnium his parallelarum diameter. Nam propria diameter has bisecat, & binæ rectæ à se invicem diversæ has bisecare non possunt. 80. 81. 82. 83.

Coroll. 11. Et in omnibus sectionibus, & in sect. opp. si recta HO in quovis puncto H sectionem, vel utramvis sectionum oppositarum contingat, atque huic parallela quævis BC sectioni, vel utrivis sectionum oppositarum in punctis B, C occurrat, Recta HM, quæ tactum H, & medium punctum M rectæ BC conjungit, erit hujus, atque huic parallelarum diameter. Patet ut *Coroll.* 9. 80. 81. 82.

Coroll. 12. In Parabola, si in puncto quolibet H contingat HO, sitque huic parallela quælibet BC utrinque ad sectionem terminata; Quæ HM per tactum H ducitur diametro cuivis ST parallela, erit rectæ BC, atque huic parallelarum diameter. Nam harum diameter (per *Coroll.* præced.) per H transit, & (per *Coroll.* 3.) est parallela ST, ideoque non est ab HM diversa. 82.

Coroll. 13. Parabolæ diameter præter ordinatas suas nullam rectam utrinque ad sectionem terminatam bisecat. Nam propria diameter hanc bisecat, Et à duabus rectis parallelis à se invicem diversis bisecari nequit.

Coroll. 14. Ideoque in Parabola, ductæ rectæ ad sectionem utrinque terminatæ se mutuo non bisecant.

82. *Coroll.* 15. Contingens parabolam omnibus diametris productis occurrit. Et quælibet recta utrinque ad parabolam terminata & si opus producta, omnibus diametris si opus productis occurrit. Nam quæ uni parallelarum occurrit, occurrit omnibus.

82. *Coroll.* 16. Si in Parabola recta quævis H M, diametro cuivis S T parallela, rectam quamvis B C utrinque ad sectionem terminatam bisecet, Erit hujus atque huic parallelarum diameter. Nam omnes diametri sunt parallelæ (per *Coroll.* 3.) Et (per 13.) præter ordinatas suas nullam omnino rectam ad sectionem utrinque terminatam bisecant.

75. 76. *Coroll.* 17. In omnibus sectionibus, & sectionibus
77. oppositis, & inter sectiones oppositas, ex diametrorum genesi liquet Contingentes in extremis rectæ cujusvis B C ad diametrum quamlibet H K ordinatæ super eadem diametro coire in aliquo puncto I, aut esse eidem parallelas.

Prop. XXI. Theor. XX.

84. 85. *In Ellipsi, & sectionibus oppositis, Quæ* D H E *per medium punctum* H *diametri alicujus* A B (*quæ in opp. sect. sit determinata*) *utcunque ducitur. Sectioni vel sectionibus oppositis in punctis* E, D *occurrens, à puncto* H *bifariam dividitur.*

Si D H E sit ad diametrum A B ordinata, jam liquet propositum. Sin minus; è punctis E, D intelligantur ordinatæ ad diametrum A B, rectæ E G, D F, Quæ parallelæ cum sint, erunt triangula H E G, H D F similia; Per *Coroll.* 2. præced. erit

B F x F A : G B x G A : : DFq : G E q :: (propter sim. triang.) F H q :G Hq unde alternando, & componendo in Ellipsi, dividendo in oppositis sectionibus,

B F

$$\left.\begin{array}{l} BF \times FA + FHq \\ FHq - BF \times FA \\ \textit{i. e.}\ HAq \end{array}\right\} : FHq :: \left\{\begin{array}{l} BG \times GA + GHq \\ GHq - AG \times GB \\ \textit{i. e.}\ HAq \end{array}\right\} : GHq$$

Unde F H = H G & ob sim.triang. inde D H = H E.

Prop. XXII. Theor. XXI.

In Hyperbola, vel oppositis sectionibus omnes diametri coeunt in occursu asymptoton H, *quarum determinatæ ibidem mutuo se bisecant. Et in Ellipsi omnes diametri coeunt, & se mutuo bisecant in communi quodam intra sectionem puncto* H. 86. 87.

Cum diametri determinatæ in hyperbola vel opp. sect. jungant tactus contingentium parallelarum, transibunt omnes (per *Coroll.* 7. 15.) per punctum H, & (per *Coroll.* 3. ejusdem prop. 15.) ibidem bisecantur. Indeterminatæ vero bisecant omnes ordinatas suas inter sectiones, quarum una necessario per H transit, & ibidem bisecatur; Omnes itaque diametri indeterminatæ pariter per H transeunt. 86.

In Ellipsi, si per duarum quarumlibet diametrorum A B, E D media puncta C, H ducatur F C H G, sectioni utrinque occurrens, hæc (per præced.) tam in C, quam in H bisecabitur; Coeunt itaque puncta C, H; unde liquet propositum. 87.

Punctum H Centrum dicitur. 86. 87.

Corollaria ad hanc & præcedentes aliquot propositiones.

Coroll. 1. Omnis recta E H per punctum quodvis E in curva Ellipseos, vel utriusvis sectionum oppositarum, & centrum H ducta, est diameter rectarum contingenti in puncto E parallelarum. 88 89.

Coroll. 2. Et omnis recta H M, per centrum H, & medium punctum M rectæ cujusvis B C ad Ellipsim, vel ad hyperbolam, vel sectiones oppositas terminatæ, ducta, est hujus, atque huic parallelarum Diameter. 88. 89

Nam bisecabit ad centrum (per prop. præced.) rectam rectæ B C parallelam; unde (per *Coroll.* 10. prop. 20.) erit harum diameter.

Coroll. 3. In Ellipsi, & Hyperbola, & inter sectiones oppositas, Diameter præter ordinatas suas nullam rectam ad sectionem, vel sectiones oppositas terminatam (nisi in centro) bisecat. Nam omnis hujusmodi recta à propria diametro bisecatur, & à binis rectis à se invicem diversis (nisi in communi earum occursu) bisecari nequit.

Coroll. 4. Atque hinc binæ rectæ ad Ellipsin, Hyperbolam, vel Sectiones oppositas, terminatæ (nisi in Centro) se mutuo non bisecant.

Coroll. 5. In oppositis Sectionibus, & in Ellipsi, partes oppositæ à quavis diametro A B abscissæ, suprapo-
86 87. sitæ congruunt. Nam ducta alia quavis diametro E H D, suprapositis figuris, congruent (ob æquales rectas & angulum communem) puncta H, A, D, punctis H, B, E respective; & sic de cæteris punctis.

86. *Coroll.* 6. Unde ipsæ sectiones oppositæ supra positæ congruent.

Prop. XXIII. Theor. XXII.

90. 91. *In sectionibus oppositis, & in Ellipsi, Si per centrum C agatur recta* E D *diametri alicujus* A B (*quæ in opp. Sect. sit determinata*) *ordinatis* G I *parallela, Bisecabit hæc rectas omnes* F G *diametro* A B *parallelas, & ad sectionem, vel sectiones oppositas, utrinque in* F, G *terminatas. Et conversim.*

A punctis F, G intelligantur ad diametrum A B ordinatæ F H, G I; Ob rectas parallelas erit F H = G I, unde (per convers. *Coroll.* 5. & 6. prop. 20.) A H = B I, & (ob A C = C B) H C = C I = (ob rectas parall.) G M = M F.

2. Si F G bisecetur à recta E D in M, erit parallela AB. Nam factis ut supra, Erit (ob parallelismum) F M : H C : : M G : C I *i. e.* (ob F M = (ex hyp.) M G) H C = C I, unde & A H = B I, & (per *Coroll.* 5. & 6. prop. 20.) F H = G I : Ergo cum sit H F || G I erit F G || A B.

Coroll.

Coroll. 1. Hinc recta F G est ad diametrum E D ordinata. 90. 91.

Diameter E D infinite extensa dicitur diametro A B *Conjugata.*

In Ellipsi eadem utrinque in E D ad Sectionem terminata, Vel in oppositis sectionibus, abscissis utrinque C D, C E, ut sint eædem contingentis in utrovis vertice B ad asymptotos utrinque terminatæ partibus B K, B L æquales (proindeque æquales inter se.) Dicitur D E *Secunda diameter* diametro A B *conjugata.* 91. 90.

Coroll. 2. Conjugatarum diametrorum ordinatæ sunt diametris suis reciproce parallelæ; Et conjugatæ diametri sunt ad se mutuo ordinatæ.

Coroll. 3. Ordinatarum ad diametrum quamvis E D inter sectiones oppositas (*i. e.* indeterminatam) minima est quæ per centrum transit, & à centro remotiores sunt propioribus majores, fiuntque tandem data quavis recta ST majores. Nam quo major est C M *i.e.* I G, eo major B I, & proinde eo major C I = M G. Sumptaque C I ⊏ S T ductaque I G parallela E D, & G M parallela I C, erit ordinata G M = C I, *i. e.* ⊏ S T. 90.

Coroll. 4. In oppositis sectionibus, conjugatarum diametrorum una est determinata, altera indeterminata. Nam ordinata ad diametrum determinatam occurrit utrique asymptoto in P, Q ad easdem partes cum sectione, unde huic parallela extra angulum asymptoton cadet. Et vice versa. 90.

Coroll. 5. Cum omnis recta per quodvis punctum in utravis sectionum oppositarum (modo asymptoto non parallela, nec sectioni oppositæ occurrens) eidem sectioni denuo occurrat, sitque ad diametrum aliquam determinatam ordinata, habeatque rectam aliquam per centrum extra angulum asymptoton cadentem sibi parallelam, Atque omnis recta intra angulum asymptoton cadens sit diameter determinata; Liquet omnes rectas per centrum ductas esse diametros; Exceptis tantummodo Asymptotis, quæ quasi limites sunt, qui determinatas diametros ab indeterminatis disterminant, 90.

&

& in quas diametri (ut de contingentibus jam oli[m] dictum est) ultimo degenerant. Nam abeunte puncto B in infinitum, Contingens KBL (accedente puncto L ad C,) cumque hac huic parallela ED, atque h[æc] conjungens CB, asymptoto CK omnes coincident, u[t] advertenti facile patebit.

In Ellipsi omnes omnino rectæ per centrum (per *Coroll.* 1. prop. 22.) erunt diametri.

Coroll. 6. In Hyperbola, vel oppositis sectionibus, & Ellipsi, Contingens in vertice cujuslibet diametri occurrit omnibus diametris si opus productis, except[a] duntaxat huic conjugata. Idem de ordinatis ad quamlibet diametrum (si opus productis) intellige.

90. 91. *Coroll.* 7. In Hyperbola, & Ellipsi, CBq : CDq :: AI×IB : IGq. Nam in hyperbola, CDq = BLq, & OI×IG = IGq, unde patet per prop. 16. In Ellipsi CBq = AC×CB, unde patet per *Coroll.* 2. prop. 2.

Coroll. 8. Si angulus asymptoton sit rectus, erit omnis transversa diameter secundæ diametro huic conjugatæ æqualis; &c. Nam in hoc casu erit ubique CB = BL = CD. Idem erit in Ellipsi, si Ellipsis sit Circulus.

Prop. XXIV. Theor. XXIII.

92. 93. *In Hyperbola & Ellipsi, sit quælibet diameter* DF, (*quæ tamen in hyperbola sit determinata*) *cujus vertex* D, *vertex oppositus* F, *secunda diameter huic conjugata* GB, *& ad* DF *quælibet ordinata* KN; *Fiat ipsis* FD : GB : *tertia proportionalis* LR, *in qua* (*ultra* R *producta in Hyperbola*) *sumatur punctum* M, *ut sit* FD : DK :: LR : MR *dico* NKq = FK×MR = DK×LM.

Ob FD : DK :: LR : MR erit componendo in Hyperb. dividendo in Ellipsi

$$\left.\begin{matrix} FD \pm DK \\ FK \end{matrix}\right\} : DK :: \left\{\begin{matrix} LR \pm MR \\ LM \end{matrix}\right\} : MR,$$

Unde FK×MR = DK×LM. Rursum ob FD : GB : LR ∺ erit

DF

FD:LR::FDq:GBq:: (horum subquadrupla) FDq:CBq:: (per *Coroll.* 7. præced.) DK×FK:NKq; :(ex hyp.) DK:MR::DK×FK:MR×FK, ergo NKq=MR×FK=DK×LM.

Recta LR dicitur *Latus rectum* sive *Parameter*.

Rectangulum ex diametro quavis & sua parametro FD×LR vocatur *Figura* istius diametri.

Coroll. 1. In hyperbola, si angulus asymptoton sit rectus, erit omnis diameter suæ parametro æqualis &c. patet ex *Coroll.* 8. præced.

Hujusmodi vero hyperbola ob transversam diametrum (quod & latus transversum quandoque dicitur) parametro sive lateri recto æqualem, dicitur Hyperbola *Æquilatera*.

Coroll. 2. Si Ellipsis sit Circulus, erunt omnes parametri diametris suis & sibi ipsis æquales.

Coroll. 3. Et in qualibet Ellipsi, binæ quælibet diametri conjugatæ sunt duæ mediæ proportionales inter earum parametros.

Coroll. 4. GBq=figuræ diametri FD & CBq=$\frac{1}{4}$ ejusdem fig.

Coroll. 5. DF:LR::DK×FK:NKq. Patet supra. 92. 93.

Coroll. 6. Quadratum ordinatæ NK in Hyperbola excedit rectangulum ex parametro LR & diametro intercepta minori DK, *i.e.* LR×DK, rectangulo DK×MR quod simile est figuræ diametri FD×LR. Nam NKq=DK×LM=LR×DK+DK×MR. Et FD:DK::LR:MR, *i.e.* FD×LR simile DK×MR. 93.

Rectangulum vero ex intercepta diametro majori FK & recta LM *i.e.* FK×LM, quod etiam simile est figuræ diametri, excedit quadratum ex NK, rectangulo ex parametro LR & eadem FK *viz.* LR×FK. Nam (prius) FK:DK::LM:MR, unde FK×LM simile DK×MR, quod (prius) simile FD×LR. Estque NKq=FK×MR=LM×FK−LR×FK. 92.

Coroll. 7. In Ellipsi vero, Quadratum ex NK deficit à rectangulo LR×DK, rectangulo DK×MR, quod 93.

 simile

ſimile eſt figuræ diametri. Et à rectangulo L R × F K, rectangulo F K × L M, quod eidem figuræ etiam ſimile eſt. Nam N K q = D K × L M = M R × D K — R L × D K; Et N K q = F K × M R = F K × L R — F K × L M. Eſtque (ut prius in Hyperbola) F D × L R ſimile D K × M R, ſimile F K × L M.

Schol. Ex hoc exceſſu & defectu quadratorum ex rectis ordinatis in HYPERBOLA & ELLIPSI, Magnus ille è veteribus geometra APOLLONIUS *Pergæus* (in hyperbolà, habita tantum ratione rectanguli ex parametro & diametro intercepta minori) hæc nomina ſectionibus impoſuit, quibus uſa eſt omnis poſteritas.

Prop. XXV. Theor. XXIV.

94. *In Parabola, ſit quælibet diameter* D C, *& ad hanc quælibet ordinata* B C; *ſi interceptæ diametro* D C *& conterminæ ordinatæ* C B, *fiat tertia proportionalis* L R; *Dico quadratum ordinatæ cujuſvis ad eandem diametrum* K N *æquale eſſe rectangulo ex eadem recta* L R *& intercepta diametro* D K, *viz.* N K q = L R × D K.

Ob D C : C B : L R ∸ erit C B q = D C × L R. Et(per *Coroll.* 4. prop. 20.)

$$\left.\begin{matrix}CBq\\DC{\times}LR\end{matrix}\right\} : NKq :: DC : DK :: DC \times LR : DK \times LR.$$

Unde N K q = D K × L R; & ſic ubique.

Recta L R (ſicut in Hyperbola & Ellipſi) dicitur *Latus rectum* ſeu *Parameter.*

Schol. Ex eo quod rectangulum æquale quadrato ordinatæ, habenſque pro altitudine diametrum ejus abſciſſam, *Comparatum* ſive *applicatum* rectangulo ex eadem abſciſſà & parametro, eidem congruat; Hæc ſectio *Apollonio* PARABOLA dicta eſt.

Prop. XXVI. Theor. XXV.

95. 96. *In Parabola, ſi binæ quælibet diametri* C D, G E (*quarum vertices* C, G) *ſi opus productæ eidem recta*

I H

H utrinque ad Sectionem in I, H *terminatæ, & si [..]us productæ, occurrant in binis punctis* D, E, *vel bi[..] quibusvis rectis inter se parallelis* I H, O P, *ad se[..]ionem ut prius terminatis occurrant in* D, Q, E, R; *Dico rectangula ex segmentis ejusdem rectæ, vel recta[..]rum parallelarum, ab occursibus diametrorum factis, [pro]portionalia esse partibus diametrorum inter hujusmodi [r]ectam vel rectas parallelas & vertices* C, G *jacenti[b]us, scilicet si recta sit unica.*

ID×DH : HE×EI :: CD : GE. *Sin binæ sint rectæ* ID×DH : OR×RP :: CD : GR; *& sic de cæteris punctis.*

Idem erit de quadratis contingentium, si coeuntibus ex. gr. punctis H, I *recta unica, vel binarum rectarum altera fiat contingens, viz.* HDq : IEq :: CD : GE & 96.

HDq : OR×RP :: CD : OR *& sic de cæteris punctis.*

Bisectis I H, O P in S, T, Connexa S T occurrat sectioni in A, erit hæc rectarum I H, O P diameter; ductaque L A K his parallela occurrente diametris in L, K, eadem sectionem in A continget; à punctis C, G intelligantur ordinatæ ad diametrum A S T rectæ C M, G N, quæ erunt propterea rectis L A K, I H, O P parallelæ; Erit per Coroll. prop. 18.

1 ID×DH : $\left\{\begin{matrix} \text{LAq} \\ \text{CMq} \end{matrix}\right\}$ :: CD : CL & per *Corol.* 4. prop. 20.

2 CMq : NGq :: $\left\{\begin{matrix} \text{CL} \\ \text{MA} \end{matrix}\right\}$: $\left\{\begin{matrix} \text{NA} \\ \text{GK} \end{matrix}\right\}$ & per coroll. prop. 18.

3 $\left.\begin{matrix} \text{AKq} \\ \text{NGq} \end{matrix}\right\}$: HE×EI :: GK : GE ergo ex quo.

4 ID×DH : HE×EI :: CD : GE. Rursum per Coroll. prop. 18.

5 HE×EI : OR×RP :: GE : GR. Ergo per proportiones 4 & 5 ex æquo

ID×DH : OR×RP :: CD : GR; & sic de cæteris punctis.

Pars 2*da* patet. Nam coeuntibus punctis H, I fit $ID \times DH$
$= DHq$ & $EI \times EH = HEq$ &c.

95. 96. *Coroll.* Si VX fit parameter diametri AST, erit GE
$\times VX = IE \times EH$, & fic de punctis D, Q, R. Nam
(per hanc prop. 26.) $IS \times SH = SHq : IE \times EH ::$
$AS : GE :: VX \times AS : VX \times GE$; Sed $VX \times AS$ (per
prop. præced.) $= SHq$; Ergo & $VX \times GE = IE \times$
EH *i. e.* $VX : IE :: EH : GE$. Quam proportionem
verbis fic commode enunciabis, Ut parameter diame-
tri alicujus in Parabola ad fummam duarum quarum-
libet ordinatarum ad eandem diametrum, fic earum
95. differentia ad differentiam abfciffarum. Nam VX eft
Parameter, IE (ob $IS = SH$ & $SE = NG$) eft fum-
ma ordinatarum SH, MG; EH eft earum differentia,
Et $EG = NS$ eft abfciffarum AS, AN differentia.

Prop. XXVII. Theor. XXVI.

97. 98. *Si duæ rectæ* LA, AE, *quamlibet è fectionibus co-*
99. 1. *nicis vel fectiones oppofitas in* LE *contingentes, vel*
2. 3. *quarum una* AL *in hyperbola, vel fectionibus opp. fit*
forte afymptotos, concurrant in A, *recta vero quævis*
ND *earum alteri* EA *parallela, (fi opus producta) al-*
teri LA *(fi opus productæ) occurrat in* B, *& fectioni,*
vel utrivis fectionum oppofitarum in N, D, *& tactus*
conjungenti LE *vel (fi* LA *fit afymptotos) rectæ per*
tactum A *afymptoto* LA *parallelæ, in* R; *Dico* BRq
$= BD \times BN$.

97. 98. *Idem erit de quadrato ex* BD *vel* BN, *fi coeunti-*
99. 1. *bus punctis* B, D, *recta* BR DN *ellipfin, vel unam è*
fectionibus oppofitis contingat.

97. 98. Nam (per prop. 17. vel 18.) $BD \times BN : BLq ::$
1. 2. 3. $AEq : ALq :: BRq : BLq$: (ob fimil. triang.) Ergo
$BD \times BN = BRq$.

3. Si tactu L in infinitum abeunte recta, AL fiat afym-
ptotos, erit (ob punctum L infinite diftans) EL pa-
rallela AL unde $BRq = AEq =$ (per *Coroll.* prop.
15.) $BD \times BN$.

2. Coeun-

2. Coeuntibus punctis B, N fit $BD \times BN = BNq$ vel $BDq =$ (prius) BRq. 97. 98. 99. 1.

Coroll. Si BRDN sit contingens, ob $BRq = BNq$, Erit $BR = BN$ vel BD.

Prop. XXVIII. Theorema XXVII.

In Hyperbola vel Sectionibus oppositis, si à binis punctis A, D *agantur duæ rectæ* AG, DF *inter se parallelæ, utrivis asymptoto si opus productæ in* GF *occurrentes; & ab eisdem punctis totidem aliæ* AH, DI, *inter se quoque parallelæ, alteri asymptoto si opus productæ occurrentes in* HI; *Dico* $AG \times AH = DF \times DI$. 4. 5.

Connexa AD & si opus producta secet asymptotos in B, D; Erit ob $AB = DE$, & $BD = EA$, & ob sim. triangula

$$\left.\begin{matrix} AB \\ ED \end{matrix}\right\} : \left\{\begin{matrix} BD \\ EA \end{matrix}\right\} :: AG : DF \ \&$$

$$ED : EA :: DI : AH \text{ Ergo}$$

$$AG : DF :: DI : AH$$

i.e. $AG \times AH = DF \times DI$.

Coroll. 1. Hinc si AG, DF sint asymptoto CH, & AH, DI asymptoto CG parallelæ, erunt constituta parallelogramma CGAH, CFDI æqualia. Nam parallelogramma æquiangula proportionalia sunt rectangulis è lateribus, quæ (prius) æqualia sunt. 6.

Coroll. 2. Unde Rectæ BAE, KDL hyperbolam vel sectiones oppositas utcunque contingentes, ab angulo asymptoton abscindunt triangula LCK, BCE æqualia. Nam æqualia parallelogramma IDFC, GAHC (ob KL, BE in D & A bisectas) sunt eorum dimidia. 7.

Coroll. 3. Ob æqualia triangula ECB, LKC, & angulum ad C communem vel æqualem, erit. 7.

1. $LC : CE :: CB : CK$. Et componendo vel dividendo.

$$2. \left\{\begin{matrix} LC \pm CE \\ LE \end{matrix}\right\} CE :: \left\{\begin{matrix} CB \pm CK \\ BK \end{matrix}\right\} : CK$$

Coroll. 4. Si contingentes (si opus productæ) concurrant 7.

currant in O, addito vel dempto communi spatio CEOK, æqualia etiam erunt triangula OKB, OLD & angulus ad O communis vel æqualis. Ideoque

1. BO : OE :: LO : OK; unde comp. vel div.

$$2.\ \left\{\begin{matrix}BO\pm OE\\ BE\end{matrix}\right\} : \left\{\begin{matrix}OE\\ \text{vel}\\ BO\end{matrix}\right\} :: \left\{\begin{matrix}LO\pm OK\\ LK\end{matrix}\right\} : \left\{\begin{matrix}OK\\ \text{vel}\\ LO\end{matrix}\right\}$$

Et dimidiatis antecedentibus, erit

3. BA : OE vel BO :: LD : OK vel LO.

Et dividendo

$$4.\ BA\left\{\begin{matrix}BO-BA\\ OA\end{matrix}\right\} :: LD : \left\{\begin{matrix}LO-LD\\ DO\end{matrix}\right\}\ \text{\&c.}$$

Prop. XXIX. Theor. XXVIII.

8. 9. *Si à puncto quovis* L *in utravis asymptoto hyperbolæ, vel sectionum oppositarum ducantur duæ rectæ* LT, LOP; *quarum* LT *sectionem contingat in* T, LOP *vero sectioni, vel sectionibus oppositis, occurrat in duobus punctis* O, P; *Et a punctis* O, T, P, *ducantur rectæ* OQ, TV, PR *asymptoto* CL *in qua est punctum* L *parallelæ, alteri asymptoton* CM (*si opus productæ*) *occurrentes in* Q, V, R; *Si puncta* O, P *sint ad eandem sectionem; rectarum* OQ, PR *summa, sin ad oppositas; earundem differentia, æqualis erit duplæ* TV.

Productæ si opus LT, LOP occurrant asymptoto VR in A, M, & ab utrovis O, P, ex. gr. O ducatur OB parallela VC occurrens LC in B.

Ob triangula MPR, OLB similia & MP = OL erit PR = LB. Estque BC = OQ, unde CL = OQ ± PR = (ob AT = TL) 2 TV.

Coroll. 1. Hinc si per idem punctum L ducantur quotlibet LOP, erit duarum quarumvis OQ, PR ab ejusdem rectæ LOP punctis ductarum summa, vel differentia duarum OQ, PR ab alterius cujusvis rectæ LOP punctis ductarum summæ vel differentiæ æqualis. Nempe ubique æqualis duplæ TV.

Coroll.

Coroll. 2. Si Recta per L sit alteri asymptôton paral- 10.
la, in unico puncto O sectioni occurret, eritque, in
pc casu, sola OQ=2TV. Nam OQ=CL=
TV. Unde in Corollario præcedenti eadem est ra-
io solius hujusmodi OQ quæ duarum aliarum OQ,
R summæ, vel differentiæ.

Prop. XXX. Problema II.

Datæ rectæ lineæ DE, *ad sectionem quamvis coni-* 11. 12.
am, vel ad sectiones oppositas utrinque in D, E *ter-* 13. 14.
minatæ diametrum invenire; Et centrum in Hyper-
bola vel opp. sect. & Ellipsi.

Ducatur quælibet HI ipsi DE parallela, sectioni vel sectioni oppositæ vel sectionibus oppositis utrinque in H, I, occurrens; Bisecentur DE, HI in F, G. Erit connexa FG rectæ DE diameter, per *Coroll.* 10. prop. 20.

Inventa hoc modo qualibet diametro ellipseos, vel 11.
determinata hyperbolæ, hæc producta occurrat sectioni vel sectionibus oppositis in A, B. Bisecetur AB in C; Erit C centrum per prop. 22. vel inventis hoc modo duabus quibusvis diametris, Hæ (per eandem prop. 22.) in Centro se intersecant. Posteriori methodo data utriusvis è sectionibus oppositis, vel Ellipseos reliqua tantnm portione, centrum invenitur.

Prop. XXXI. Probl. III.

In omni sectione conica, & inter sectiones oppositas, 15. 16.
à dato puncto D, *ad datam diametrum* AB, *ducere* 17. 18.
ordinatam DO; *Et diametrum huic conjugatam in*
Hyperbola vel sect. opp. & Ellipsi.

In Hyperbola, inter sectiones oppositas & in El- 15. 16.
lipsi, Invento centro C, connexa DC & producta oc- 17.
curret sectioni, vel sectioni oppositæ in E; Per E ducta EF parallela AB, occurret sectioni, vel sectioni oppositæ in F, fortè sectionem vel sectionem opposi-

tam

tam in E continget tantum; Si occurrat in ... nexa D F occurret diametro A B in O; Eritque ordinata quæsita. Nam D C = C E unde ob p... las rectas erit D O = O F. Liquet ergo prop... per *Coroll.* 2. prop. 22.

Supple figuras hujus casus. Si recta per E diametro A B parallela sit conti... erit ipsa D E ordinata quæsita. Nam (per *Co...* prop. 22.) erit in hoc casu recta E F parallela o... tis ad diametrum D C E, unde (per prop. 23. & seq.) E C D, B C A sunt diametri conjugatæ, ide... (per ejusdem prop. 22. *Coroll.* 2.) ad se mutuo or... tæ. Inventa vero qualibet ordinata, recta per cent... huic parallela erit diameter huic conjugata.

18. In Parabola, Ducta utcunque D A diametrum in A secante, in D A producta, fiat A E = D A, d... E F ipsi A B parallela occurret sectioni in F, jun... que F D occurret A B in O, eritque D O ordinata q... sita. Nam ob rectas parallelas, & ob D A = A E, D O = O F; unde liquet propositum per *Coroll.* prop. 20.

Prop. XXXII. Probl. IV.

19. 20. 21. *In omni sectione conica rectam* D T *ducere, quæ ... ctionem in dato puncto* D *contingat.*

19. 20. In Hyperbola & Ellipsi invento centro C, ductaq... diametro D C, fiat ad hanc ordinata quælibet A O deinde per D ducta per D recta D T parallela A ... Proposito satisfit. Patet per *Coroll.* 8. prop. 20.

21. In Parabola, Inventa qualibet diametro B C, per ... agatur D E ipsi B C parallela, quæ propterea erit diameter; Ad hanc fiat quælibet ordinata A O, & per ... ducatur D T ipsi A O parallela; Hæc (per idem *Coroll.* 8.) sectionem in D continget.

Prop. XXXIII. Probl V.

22. *Datæ Hyperbolæ vel Sectionum oppositarum asymptotos invenire.*

Invent...

tam in E continget tantum; Si occurrat in F, connexa DF occurret diametro AB in O; Eritque DO ordinata quæsita. Nam DC=CE unde ob parallelas rectas erit DO=OF. Liquet ergo propositum per *Coroll.* 2. prop. 22.

Supple figuras hujus casus. Si recta per E diametro AB parallela sit contingens erit ipsa DE ordinata quæsita. Nam (per *Coroll.* 1 prop. 22.) erit in hoc casu recta EF parallela ordinatis ad diametrum DCE, unde (per prop. 23. & def seq.) ECD, BCA sunt diametri conjugatæ, ideoque (per ejusdem prop. 22. *Coroll.* 2.) ad se mutuo ordinatæ. Inventa vero qualibet ordinata, recta per centrum huic parallela erit diameter huic conjugata.

18. In Parabola, Ducta utcunque DA diametrum AB in A secante, in DA producta, fiat AE=DA, ducta EF ipsi AB parallela occurret sectioni in F, junctaque FD occurret AB in O, eritque DO ordinata quæsita. Nam ob rectas parallelas, & ob DA=AE, erit DO=OF; unde liquet propositum per *Coroll.* 13. prop. 20.

Prop. XXXII. Probl. IV.

19. 20. *In omni sectione conica rectam* DT *ducere, quæ sectionem in dato puncto* D *contingat.*
21.

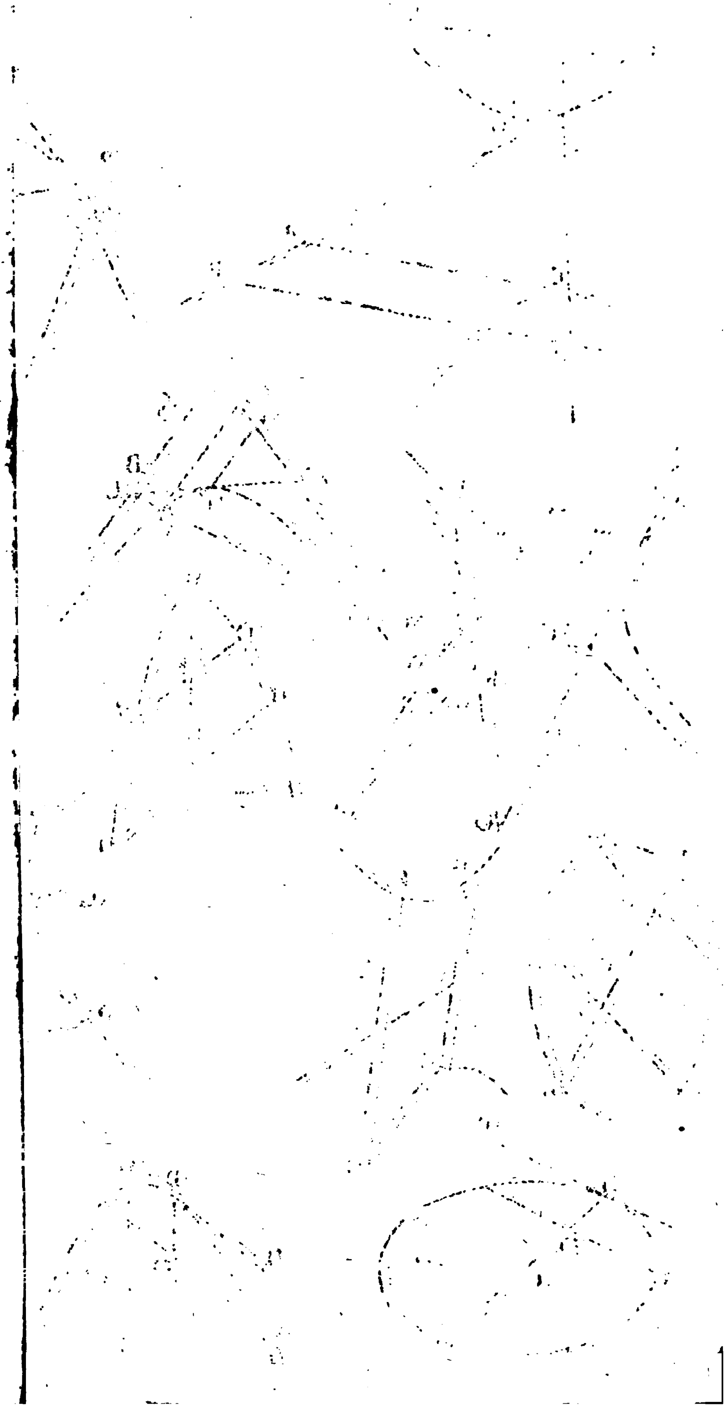
19. 20. In Hyperbola & Ellipsi invento centro C, ductaque diametro DC, fiat ad hanc ordinata quælibet AO; deinde per D ducta per D recta DT parallela AO, Proposito satisfit. Patet per *Coroll.* 8. prop. 20.

21. In Parabola, Inventa qualibet diametro BC, per D agatur DE ipsi BC parallela, quæ propterea erit diameter; Ad hanc fiat quælibet ordinata AO, & per D ducatur DT ipsi AO parallela; Hæc (per idem *Coroll.* 8.) sectionem in D continget.

Prop. XXXIII. Probl V.

22. *Datæ Hyperbolæ vel Sectionum oppositarum asymptotos invenire.*

Inventa



Inventa qualibet diametro determinata C E, & centro C, ducatur utcunque F G parallela CB, unam sectionum in G secans atque huic oppositam in F [vel si non detur sectio opposita, ducta diametro C M ipsi C B conjugata, secante G F in M, fiat M F = M G] Diametroque F G describatur semicirculus F P Q G, rectaque ubicunque ad F G perpendiculari N O æquali semidiametro C E, per O agatur P O Q ipsi F G parallela, secans circuli peripheriam in P, Q punctis, & his dimissis ad diametrum F G perpendicularibus Q R, P S, erunt junctæ G S, C S asymptoti.

Nam C B = (ex construct.) N O q = (ob parall.) Q R = (propter circ.) G R x R F; Unde (per *Coroll.* 4. prop. 15.) erit punctum R ad alteram asymptoton. Parique ratione erit punctum S ad alteram.

Prop. XXXIV. Probl. XVI.

In omni Sectione conica, Datæ diametri A B *Parametrum invenire.* 23. 24.

In Hyperbola recta E B D in vertice B contingens & ad asymptotos in E D terminata æqualis est (per def.) secundæ diametro ipsi A B conjugatæ. In Ellipsi diameter E D diametro A B conjugata, & ad sectionem in E D terminata est secunda diameter. Inventa ergo in Hyperbola & Ellipsi hujusmodi recta E D, fiat ipsis A B : E D : tertia proportionalis L R; Hæc (per def.) erit ipsius A B parameter.

In Parabola. Ordinata ad diametrum A B quavis recta G I, ipsis A I ; I G : tertia proportionalis L R; 65.
Erit L R (per def.) diametri A B parameter.

PARS II.

Definitiones.

1\. SI Recta AD ita dividatur in B, C, ut sit tota AD ad utramvis partem extremam CD, ut reliqua extrema AB ad mediam BC, Recta AD *Harmonice divisa* dicitur.

Et Puncta A, B, C, D dicuntur *Puncta divisionis Harmonicæ*, Vel *Harmonicalia.*

Coroll. 1. Ob AD : DC :: AB : BC. Erit alternando AD : AB :: DC : BC.

Coroll. 2. Utravis extremarum AB vel CD est major media BC. nam AD ⊏ CD, vel AB.

2\. *Coroll.* 3. Datis divisionis harmonicæ duobus extremis punctis E, H, & mediorum uno F, invenitur alterum G. Nempe dividendo FH in G in ratione EH ad EF; Vel EF in G in ratione EH ad HF.

3\. *Coroll.* 4. sint E, F, G, H puncta divisionis harmonicæ, sitque IF utriusvis extremæ partis EF excessus supra mediam FG; Propter EF : FG :: EH : GH erit divid.

$$\left.\begin{matrix} EF - FG \\ IF \end{matrix}\right\} : FG :: \left\{\begin{matrix} EH - HG \\ EG \end{matrix}\right\} : HG.$$

3\. *Coroll.* 5. Unde datis divisionis harmonicæ mediis punctis F G, & extremorum uno E, invenitur alterum H. Facta nempe EI = FG; Deinde faciendo IF : FG :: EG : GH.

Coroll. 6. In casu *Coroll.* 3ⁱ. liquet duo tantum puncta proposito satisfacere; ex utraque scilicet parte puncti F unum; In casu *Coroll.* 5ⁱ. unicum.

3\. 4, 5. 6. *Coroll.* 7. Positis ut in *Coroll.* 4. Cum sit IF : FG :: EG : HG; quo minor est IF respectu FG, eo minor erit EG respectu HG: si itaque sit EF = FG, hoc est,

ſt, ſi I F nullius ſit magnitudinis, erit H G infinita. Si ex datis E G, H G ſit H G infinita, erit I F nullius magnitudinis, hoc eſt, erit E F = F G. Cujus rei occurrent exempla in ſequentibus.

Lemma 1.

Recta A D *Harmonice diviſa in* B, C, *& utravis extrema parte* A B *ſimul cum media* B C *i. e.* A C *biſecta in* M, Dico 7.

$$MB : MC : MD \div$$

Producta D A, fiat $Ad = CD$

1. Ex hyp. $AB : BC :: AD : DC$

2. Comp. $\left.\begin{matrix} AB + BC \\ AC \end{matrix}\right\} : BC :: \left\{\begin{matrix} AD + DC \\ Dd \end{matrix}\right\} : DC$

Et dimidiatis antecedentibus.

3. $MC : BC :: MD : DC$.

4. Conv. & inv. $\left.\begin{matrix} MC - BC \\ MB \end{matrix}\right\} : MC :: \left\{\begin{matrix} MD - DC \\ MC \end{matrix}\right\} : MD$

Lemma 2.

Iiſdem poſitis Dico $BC : BD :: BM : BA$. 7.

Nam per 3. proport. ſupra $MC : BC :: MD : DC$ unde invertendo & alternando.

$BC : DC :: MC : MD$ & per 4[m]. proport.

$MC : MD :: MB : MC$ unde

$BC : DC :: MB : \left\{\begin{matrix} MC \\ MA \end{matrix}\right\}$ Et comp.

5. $BC : \left\{\begin{matrix} BC + DC \\ BD \end{matrix}\right\} :: MB : \left\{\begin{matrix} MB + MA \\ BA \end{matrix}\right.$

Lemma 3.

Iiſdem poſitis Dico $DC : DB :: DM : DA$. 7.

Nam ex 3. propor. ſupra, alternando & invert.

$MD : MC :: DC : BC$. Et ex 1[a]. proport.

$DC : BC :: AD : AB$. Unde

6. $MD : MC :: AD : AB$. Et conv. & inv.

$$\left.\begin{matrix} MD - MC \\ CD \end{matrix}\right\} : MD :: \left\{\begin{matrix} AD - AB \\ BD \end{matrix}\right\} : AD$$

7 Unde altern. $CD : BD :: MD : AD$.

Lemma 4.

7. *Iisdem positis Dico* $DC : DB :: AM : AB$.
Nam ex 5. proport. invertendo.

$BD : BC :: BA : MB$. Et div.

8. $$\left.\begin{matrix} BD - BC \\ DC \end{matrix}\right\} : BD :: \left\{\begin{matrix} BA - MB \\ AM \end{matrix}\right\} : BA$$

Lemma 5.

7. *Iisdem positis Dico* $AD : BD :: AM : BC$.
Per proport. 8. ductis in se mutuo extremis & mediis, $DC \times BA = BD \times AM$ similiter per proport. 1. $DC \times BA = AD \times BC$ ergo $BD \times AM = AD \times BC$ unde

$$AD : BD :: AM : BC.$$

8. 9. *Def.* In recta quavis A D si per divisionis harmonicæ puncta A, B, C, D agantur quatuor rectæ A E, B E, C E, D E in puncto quovis E extra rectam A D concurrentes, vel inter se parallelæ, Eædem *Harmonicales* appellentur.

Coroll. Recta quævis ipsi A D parallela harmonicalibus in a, b, c, d occurrens harmonice dividitur. Nam (ob parallelas rectas) secatur in eadem ratione qua A D.

Lemma 6.

10. 11. *Iisdem positis sit recta quævis* F H *cuivis harmonicalium ex. gr.* E D *parallela, tribus reliquis occurrens in* F, G, H, *Dico* F H *bisectam in* G.

Per G ducta G I K L ipsi A D parallela, similia sunt triang. I K E, G K F, & I L E, G L H. Per *Coroll.* præced. def. $IL : LG :: IK : KG ::$ (per sim. triang.) $IE : FG :: IE : GH$. Unde $FG = GH$.

Lemma

Lemma 7.

Et conversim, Recta quavis F G H *bisecta in* G, *&* 12.
quodvis punctum E *extra rectam* F H *actis rectis*
, G E, *&* E D *ipsi* F H *parallela, Dico rectas* F E,
, H E, D E, *esse Harmonicales.*
Per G ducatur K G L I occurrens quatuor rectis in
G, L, I, (quod fieri posse manifestum est.) Erunt (ob
I ‖ E D) similia Triangula, I K E, G K F, uti &
E, G L H, unde

$$IE : GH :: IL : LG \quad \text{Et}$$

$$IE : \left\{ \begin{matrix} FG \\ GH \end{matrix} \right\} :: IK : KG \quad \text{Ergo ex æquo}$$

$$IL : LG :: IK : KG.$$

Hoc est, puncta K, G, L, I sunt harmonicalia; unde
uet per defin.

Lemma 8.

Si quatuor harmonicales à recta quavis utcunque se- 13.
tur in punctis K, G, L, I, *Dico rectam* K I *har-*
mice dividi.
Per punctorum mediorum alterutrum G agatur
G F parallela rectæ E I quæ per punctorum extre-
orum à G remotius transit, tres reliquas secans in
, G, F; Erit (per Lemma 6.) F G = G H; Et tri-
gula I K E, G K F similia uti etiam I L E, G L H,
nde repetitis quæ in Lemmate præced. Erit I L : L G
I K : K G.
Si harmonicales sint parallelæ nulla est difficultas.
Schol. Ex hoc lemmate cum præcedenti facile erue-
ır expedita methodus, Datis tribus quibusvis harmo-
icæ divisionis punctis, quartum inveniendi.

Lemma 9.

Si duæ rectæ A B C D, A F G H *harmonice divisæ* 14. 15.
beant quodlibet divisionis punctum A *commune, cæ-* 16. &c.
raque divisionum puncta rectis B F, C G, D H *conjun-*
ntur, ita ut secundum ordine à communi puncto A

 unius,

unius, cum secundo alterius conjungatur; *Dico re*ct
BF, CG, DH *vel coire omnes in communi puncto*
vel esse omnes inter se parallelas.

14. 15. Primo si earum binæ quælibet ex. gr. HD, C
16 17. coeant in E. Juncta BE secet AFGH in I, & conn
18. 19. ctatur AE; Ob divisionem harmonicam erunt E
EBI, ECG, EDH harmonicales & puncta A, I, G,
harmonicalia, uti etiam ex hypothesi sunt A, F, G,
servata vero conditione proposita, facile manifest
est puncta I, F semper cadere ad easdem partes resp
ctu reliquorum, si igitur sit F medium, scilicet int
A, G erit & I, (per *Coroll.* 6. post def. div. harm.) no
erit inter eadem puncta aliud medium I ab F dive
sum; Si ex datis A, G, H duo sint media & unum e
tremum, non erit (per idem *Coroll.*) aliud extremu
I ab F diversum, coincidunt ergo, I, F *i. e.* FB etia
transit per E.

20. 21. Secundo si GC sit parallella HD, Ob sim. triang.

$$CA : AD :: GA : AH \text{ \& div. vel comp.}$$

$$\left.\begin{matrix} AD \pm CA \\ CD \end{matrix}\right\} : AD :: \left\{\begin{matrix} AH \pm GA \\ GH \end{matrix}\right\} : AH :: \&$$

(Ob div. har.) $CB : AB :: GF : FA$. unde sim. tri
ang. ABF, ACG, Hoc est, $BF \parallel CG \parallel DH$. Ide
erit (mutatis mutandis) si sit F extremum.

Lemma 10.

22. 23. *Si Recta harmonice divisa* ABCD, *& alia bifariam*
24. 25. *divisa* BFG, *habeant quodlibet divisionum punctu*
26. 27. *commune* B. *Et duo reliqua bifariam divisæ puncti*
cum totidem alterius rectis AF, CG *conjungantur*, *&*
per residuum harmonice divisæ punctum D *agatur* D
ipsi BFG *parallela. Ita tamen ut cum punctum* B *fue*
rit bifariam divisæ extremum, secundum unius cum se
cundo alterius conjungatur, sin B *medium fuerit bifari*
am divisæ punctum, Punctum D *per quod parallela re*
cta ducitur sit à communi B *secundum*; *Cætera pro li*
bitu. Dico rectas AF, CG, DH *coire omnes in com*
muni quodam puncto E.

Ol

Ob rectarum quarum puncta conjunguntur partes
[..]us quidem æquales alterius in æquales liquet A F,
[..] concurrere. Porro manifestum est A F, C G non
[..] ipsi B G F parallelas, proindeque utramque huic
[par]allelæ D H concurrere.

[S]it ergo è tribus, duarum quarumlibet ex. gr. A F,
[C]G occursus E, Per E ducta E I parallela F G B se-
[ce]tte A B C D in I; Ob F G B bifariam divisam &
[hu]ic parallelam E I, connexa E B, erunt E B, E A,
[E]C, E I harmonicales, unde puncta B, A, C, I sunt
[har]monicalia, uti sunt ex hypothesi B, A, C, D, unde
[o]ndetur (ut in priore lemmate) puncta D, I coin-
[cid]ere. Unde patet propositum.

Prop. I. Theor. I.

Si Sectionem quamvis conicam vel Sectiones oppositas [co]ntingant binæ rectæ A D, A G *concurrentes in* A, *Per [pu]nctum vero concursus* A *agatur recta* A L K I *sectio[n]i, vel utrique Sectionum oppositarum occurrens in pun[ct]is* L, I, *& conjungenti tactus* D G (*in opp. sect. pro[d]uctæ*) *in* K, *Dico eandem harmonice dividi à pun[ct]is* A, L, K, I, *id est* A L : A I :: K L : K I. 28. 29. 30. 31. 32.

Per I, L actæ E I M H, B L N F, occurrant contin[g]entibus in E, H & B, F sectioni vero, vel sectioni [o]ppositæ, vel utrique sectionum oppositarum in M, [N]; Erit (per Prop. 19. Part. 1.) M H = E I & N F = B L *i. e.* M E = H I & N B = F L. Et (per Prop. [1]7, vel 18. Part. 1.) erit

$$\begin{Bmatrix} LB\times NB \\ LB\times LF \end{Bmatrix} : \begin{Bmatrix} EI\times EM \\ EI\times HI \end{Bmatrix} :: DBq : DEq :: \text{(per}$$

[s]im. triang.) K L q : K I q. Rursus ob sim. triang.

L B : E I :: A L : A I &

L F : H I :: A L : A I. Ductisque &c.

L B × L F : E I × H I :: A L q : A I q :: (prius) K L q : K I q. Ergo A L : A I :: K L : K I.

Coroll. 1. In hyperbola & Ellipsi si recta contingens sectionem in quolibet puncto D, cuivis diametro 33. 34.

I L

I L si opus productæ occurrat in A, & à tactu D eandem diametrum ordinetur recta D K, vel si ad d metrum quamvis I L ordinetur recta D K in cujus tremo D recta D A sectionem contingens occurrit d metro in A. Eadem diameter in punctis L, K, I, harmonice secabitur, *i.e.* erit A L : A I : : K L : K Nam producta D K donec sectioni denuo occurrat G, Contingens in puncto G (per *Coroll.* 17. prop.; part. 1.) occurrat contingenti A D super diametro I in A. Unde hic casus non differt ab illo hujus prop sitionis.

Coroll. 2. Unde (cum centrum hyperbolæ vel E
33. 34. lipseos C bisecet L I) erit per Lemma 1. hujus partis

C K : C I : C A ∴

Et per Lemma 2m. in Ellipsi per 3m. in Hyperbol

L K : C K : : A K : I K.

Et per Lemma 2. in Hyper. per 3. in Ellipsi.

L A : C A : : K A : I A

Et per Lemma 4. in Hyper. per 5. in Ellipsi.

A L : A K : : C L : I K.

Et per Lemma 4. in Ellipsi per 5. in Hyperb.

L K : L C : : K A : I A.

Alias ejusmodi proportiones supra in lemmatum de monstrationibus notavimus. Plures adhuc ex his comparando, dividendo vel componendo, eruet lector.

35. *Coroll* 3. si contingens Parabolam in quolibet punct D cuilibet diametro I L occurrat in A & à D ordine tur ad hanc diametrum recta D K, erit A I = I K Nam producta K D in G, Contingentes in D, G ut su pra in *Coroll.* coeuut super diametro in A, Recta ver A I K L in quovis alio situ A i k l sectioni occurrit i binis punctis i, l, & (per hanc prop. 1.) harmonic dividitur à punctis A, i, k, l ; Jam recta A i k l situm A I K L obtinente, abit punctum L in infinitum, und (per *Coroll.* 6. post def. div. harm. 1) A I = I K. Han vero parabolæ proprietatem nobilissimam sane ac pul cherrimam peculiari Theoremate mox dignabimur.

36. 37. *Coroll.* 4. In hyperbola vel opp. sect. si recta A L K I

si

it alteri asymptoton parallela punctum L (quod in lio quovis situ A i k l est ad unam sectionum opposi-trum proindeque ad harmonicam divisionem perti-et) in infinitum abit; (per jam dictum *Coroll.*) I = I K.

Coroll. 5. In hyperbola & oppositis sectionibus, si contingentium altera ex. gr. A D (tactu D migrante in infinitum) degeneret in asymptoton, conjungens ta-tus G D, fit recta eidem asymptoto parallela, idemque praestat quod tactus conjungens in casibus hujus prop. 1. & *Coroll.* 4. nimirum si A I K L occurrat sectioni, vel sectionibus oppositis in binis punctis, erit ut in casu hujus prop. A L : A I :: K L : K I. Si vero A I K L sit alteri asymptoto C E parallela, erit ut in casu *Coroll.* 4. A I = I K. 38. 39. 40. 38. 39. 40.

Coroll. 6. Et ut proprietates quantumvis specie distinctas aliquali affinitatis vinculo conjunctas esse & in se mutuo transire innotescat; si in hyperbola, vel sect. opp. contactuum D G uterque infinitum abeat, contingens utraque fit asymptotos, harumque occursus A centro coincidit; punctoque K cum tactus contingente in infinitum migrante, fit (per idem *Coroll.*) L A = A I; est vero in hoc casu L I diameter atque inde etiam L A = A I. 41.

In Ellipsi vero vel sect. opp. si contingentium occursus A migret in infinitum, erit (per idem *Coroll.*) L K = K I; sed & propter punctum A infinite distans erunt D A, L A, G A invicem parallelae, unde erit D G diameter, & L I ad hanc ordinata, atque hinc iterum L K = K I. 42. 43.

Prop. II. Theor. II.

Si parabolam, cujus diameter quaelibet A K, *& ejus vertex* I, *recta* A D *ubivis in* D *contingens, eidem diametro occurrat in* A, *& à tactu* D *ordinetur ad diametrum recta* D K; *Dico* A I = I K. 44.

Per D ducta diametro D M ad hanc ordinetur I G O

 quae

quæ erit propterea parallela A D, & bisecta in G, Ab O ad diametrum A K ordinetur O N quæ erit ideo parallela D K, eruntque triangula K D A, N O I similia;

Ob A D = I G erit I O = 2 A D ideoque ob simil. triang. N I = 2 A K, & N O = 2 K D, propter Parab. (per *Coroll.* 4. prop. 20. p. 1.) N O q = 4 K D q : K D q :: N I : K I, *i. e.* N I = 4 K I, Ergo 4 K I = 2 A K *i. e.* 2 K I = A K *i. e.* K I = A I.

In figuris prop. 1. & Corollariorum ejus 1, 2, 3, 4, & 5. *Coroll.* ad hanc & præcod. prop. Si ex eodem puncto A recta A D sectionem vel unam è sect. opp. contingat, altera A L I sectionem vel sectiones oppositas secet in duobus punctis L, I; vel in unico I si sit Hyperbolæ asymptoto parallela, vel Parabolæ diameter; Datisque tribus A, L, I inveniatur quartum divisionis harmonicæ punctum K, quod sit medium inter L & I si puncta L, I sint ad eandem sectionem, extremum verò si sint ad oppositas, vel si A I sit asymptoto parallela vel parabolæ diameter fiat I K = A I, & connectatur K D occurrens denuo sectioni, vel sectioni opp. in G. vel si A D sit asymptotos ducatur K G parallela A D secans sectionem in G, erit connexa A G contingens. Nam datis tribus A, L, I non erit aliud har. div. punctum extremum, vel inter data L, I medium, præter K. Nec aliud punctum divisionis bifariam ad partes sectionis præter K, unde ex propp. 1. & 2. satis liquet propositum.

Prop. III. Theor. III.

45 46. 47. 48. *Si sectionem quamvis conicam, vel sectiones oppositas contingant binæ rectæ* A F, A G, *concurrentes in* A, *& per* A *ducatur* A V *tactus conjungenti* F G *parallela, sumptoque in* A V *quolibet puncto* V, *per* V *& medium punctum* O *tactus conjungentis ducatur* V O; *Dico, si recta* V O *sectioni, vel sectionibus oppositis occurrat in binis punctis* T, L *eandem harmonice dividi à punctis* V, T, O, L.

Connexa A L sectioni occurrat in Q & rectæ F G in

in R, & ducatur QP eidem sectioni, vel sectioni oppositæ occurrens in P, erit connexa AO diameter, bisecans QP in S. Propter AL (per præced.) harmonice sectam, erunt OL, OR, OQ, OA harmonicales; ergo cum sit QS = SP, & SP sit parallela FG, incidet punctum P (per lemma 6. hujus p.) in rectam VOL; id est punctum P sectioni, rectæ QP, & rectæ VOL commune est, ac proinde idem cum puncto T: sed ob AQRL (per præced.) harmonice divisam, erunt parallelæ rectæ AV, QT, RO, harmonicales, & punctum L commune est, unde recta VO harmonice dividitur à punctis V, T, O, L. Vel sic. Ostensa ut prius SQ = SP & puncta T, P coincidere intelligatur ducta AT; ob TQ || VA & bisectam ab AO in S, erunt (per lemma 7.) AV, AT, ASO, AQL harmonicales, unde (per lemma 8.) liquet propositum.

Coroll. 1. In hyperbola, vel sectionibus oppositis, 49.
si punctum V ita sumatur ut sit VO alteri asymptotôn 50.
DC parallela, manifestum est hanc uni tantum sectionum oppositarum idque in unico puncto T occurrere, unde in hoc casu (occursu L in infinitum abeunte) fit (per sæpe dictum coroll.) VT = TO.

Coroll. 2. Et in parabola coincidentibus punctis V, A 51.
hoc est existente VO diametro fit VT = TO ut prius ostensum.

Coroll. 3. Et in omnibus casibus puncto V in infinitum abeunte, hoc est, ducta VTOL ipsi VA parallela, coincidentibus T, F, & G, L; fit TO = LO, quod & verum est ob diametrum AO.

Prop. IV. Probl. I.

A dato extra sectionem, vel sectiones oppositas puncto 52. 53.
A, rectas AD, AG *ducere quæ sectionem vel sectio-* 54. 55.
nes oppositas contingant. Oportet autem ut punctum A *in Hyperbola vel sect. opp. non sit centrum.*

Per A ducantur AIL, Ail sectioni vel sectioni-

 bus

bus opp. vel utrique sect. opp. &c. in I, L, i, l occurrentes, quod fieri posse manifestum est; datis tribus harmonicæ divisionis punctis in utraque recta A, L, I; A, l, i, inveniatur in utraque intra sectionem quartum K, k, connexa K k occurrat sectioni, vel sectionibus oppositis in D, G, erunt connexæ A D, A G contingentes quæsitæ.

Nam (per prop. 1. hujus p.) conjungens tactus contingentium ex puncto A transibit per K, k, proindeque non erit à D G diversum.

Supple figuras horum casuum.

Nota, si sit A I = A L quod inter sect. opp. quandoque fieri potest, invento k ducenda est k D G parallela I A L: nam K infinite distat. Si A sit in altera asymptotôn, erit D G infinita, hoc est asymptoto parallela, unaque tantum erit contingens, hoc est contingens altera erit ipsa asymptotos.

Schol. Alias methodos (easque forte aliquando commodiores) ex prop. 1. hujus partis corollariis lector facile excogitabit.

Prop. V. Theor. IV.

56. 57. *In plano sectionis conicæ, vel sectionum oppositarum*
58. 59. *ducta quavis recta* V A *quæ sectioni, vel sectionibus*
60. *non occurrat, nec per centrum transeat; inventaque diametro* A M O *rectarum in sectione, vel sectionibus ipsi* A V *parallelarum, occurrente rectæ* A V *in* A; *Dico conjungentes tactus binarum quarumcunque contingentium* V H, V I *ex quovis puncto* V *rectæ* V A *ductarum, transire per unum idemque punctum* O *in sectione, vel in altera sectionum oppositarum, medium scilicet rectæ* F G *conjungentis tactus contingentium* A F, A G *à puncto* A *ductarum.*

Conjungens tactus F G (per def.) ordinata est ad diametrum A O M, proindeque parallela A V & bisecta in O; connexa V O & producta occurret sectioni,
5. vel sectionibus opp. in T, L, vel (si sit asymptoto parallela) in unico puncto T, si occurrat in binis punctis,

eadem

eadem à punctis V, T, O, L harmonice dividitur, alias à punctis V, T, O bifariam dividitur, ut patet ex prop. 3. & ejus *Coroll.* 1; at per prop. 1. & *Coroll.* 4. liquet conjungentem tactus H I contingentium V H, V I transire per O, cum stantibus cæteris punctis non erit intra sectionem aliud punctum divisionis harmonicæ vel divisionis bifariam ab O diversum.

Coroll. 1. In hyperbola si punctum V in alteram asymptotôn incidat, contingentium ex V altera V I in asymptotôn degenerante, recta per alterius V H contactum H eidem asymptoto parallela per O transibit. Nam H I vice fungitur tactus conjungentis. 60.

Coroll. 2. Si à puncto extra sectionem, vel sectiones opp. ducantur duæ contingentes A F, A G, sitque tactus conjungens F G; similiter ex alio puncto V sint contingentes V H, V I, & tactus conjungens H I, occurrens F G in O; juncta A K, erit punctum O concursus omnium conjungentium tactus contingentium ex quovis puncto rectæ A K ductarum; & (per prop. 3. cum *Corollariis*) ducta per O recta qualibet occurrente utcunque rectæ A V & sectioni vel sect. opp. in binis punctis, eadem harmonice dividitur; vel bifariam dividitur tantum, si sit alteri asymptotôn hyperbolæ parallela, vel sit parabolæ diameter. 56. 57. &c.

Prop. VI. Theor. V.

Sumpto intra sectionem conicam, vel unam sectionum oppositarum quolibet puncto O, *quod in Ellipsi non sit centrum, inventaque diametro quæ per* O *transit, per* O *ad hanc ordinetur* F O G, *sectioni in* F, G, *occurrens, in cujus extremis sectionem contingant* F A, G A, *diametro* A O *occurrentes in* A, *&* *per* A *agatur* A V *ipsi* F G *parallela*; *Dico rectas* H K, I K *contingentes in occursibus rectæ cujusvis* H O I *per punctum* O *ductæ*; *&* *sectioni, vel sect. opp. in* H I *occurrentis, convenire in punctum aliquod rectæ* A V, *aut esse eidem parallelas.* 56. 57. 58. 59. 60.

Si

Si contingentes HK, IK concurrant in K, agatu KO, quæ producta occurrat sectioni vel sectionibu in L, T, (quod semper fiet nisi KO sit alteri asympto tôn hyperbolæ parallela) & rectæ AV in V: propte diametrum erit O medium punctum rectæ FG, und recta LOTKV (per prop. 1.) harmonice dividitur punctis L, O, T, K, & (per prop. 3.) à punctis L, C T, V, ergo coincidunt puncta K, V. Si LOTK fit asymptoto parallela bifariam dividitur à punctis C T, V, & à punctis O, T, K, unde in hoc etiam casi etiam coincident K, V.

2. Si HOI diametro AO coincidat (in Ellipsi scil cet vel sect.opp.) manifestum est fore HK, IK ipsi A parallelas.

60. *Cor.* Cum eadem sit ratio rectæ per tactum asymptot parallelæ, atque tactus conjungentis; liquet, si rect HOI ducta sit alteri asymptotôn parallela, tangente in occursu ejus cum sectione HK per ejusdem asym ptoti occursum cum recta AV transire.

Nota, si O sit centrum in Ellipsi erit AF parallel AG, & HK || IK hoc est recta AV in quam con tingentes concurrunt, infinite distat.

Prop. VII. Theor. VI.

61. 62. 63. *In omni Sectione Conica, vel sectionibus oppositis ducta quavis recta* FG *quæ sectioni vel sectionibus op positis in binis punctis* F, G *occurrat* (*vel forte unico in hyperbola vel sectionibus oppositis*) *nec per centrum tran eat; Dico conjungentes tactus* HI *binarum quarum cunque contingentium* BH, BI, *à quovis puncto* B *recta* FG *extra sectionem vel sectiones sumpto, ad sectionem vel sectiones ductarum, transire per unum idemque pun ctum* A *extra sectionem, vel sectiones, punctum scili cet in quod coeunt contingentes sectionem, vel sectione in punctis* F, G; *vel in quod tangens horum puncto rum altera convenit cum asymptoto, quoties* FG *duct est asymptoto parallela.*

Quo

Quod si punctum B *in alteram asymptotôn incidat, recta per contactum unicæ contingentis à puncto* B *ductæ eidem asymptoto parallela, per idem punctum* A *transibit.*

Hujus propositionis paucos tantum casus (è multis) figuris expressimus, reliquos suppleat lector; exempli gratia hos,

Cum puncta F, G *sunt ad eandem sectionem,* H, I *vero ad oppositas.*

Cum punctum B *est ad asymptoton.*

Cum B *est ad asymptoton & F G simul asymptoto parallela,* &c.

A puncto B ducatur B K L M sectioni, vel sectionibus oppositis pro libitu in K, M occurrens, & rectæ H I si opus productæ in L, tactus conjungentium occursus sit punctum R, [vel forte occursus tactus conjungentis cum recta per tactum asymptoto parallela, vel etiam occursus duarum rectarum per contactus asymptotis parallelarum] & jungantur K R, M R, quarum M R si opus producta occurrat eidem vel oppositæ sectioni in N, erunt (propter B K L M harmonice divisam) rectæ B R, K R, L R, M R harmonicales. Ducta B N (si opus producta) occurrat L R (si opus productæ) in P, K R (si opus productæ) in Q, & sectioni, in O; hæc (per prop. 1. hujus p.) harmonice dividitur in B, N, P, O, & propter harmonicales (per lemma 8.) in B, N, P, Q, coincidunt ergo puncta O, Q, sive occursus rectarum B N, K R in ipsam sectionem incidit.

Ductis igitur K S N, M T O secantibus F G in S, T, hæ (per lemma 9.) convenient super recta I H (si opus productâ) in punctum aliquod D; (nam si dicantur K N, H I, M O parallelæ erit (per lemma 6.) K S = S N & O T = T M unde F G transibit per centrum contra hypothesin.) Sed ob harmonicales L R D, N R M, B F S R T G, K R O, rectæ D N S K, D O T M harmonice dividuntur à punctis D, N, S, K; D, O, T, M; unde (per prop. 4.) junctæ D F, D G sectionem vel

sectiones

sectiones opp. contingent, vel saltem continget alter
erit altera asymptotos, id est, non erunt ab A F, A
diversæ; transit ergo I H per A.

Prop. VIII. Theor. VII.

61. 62. *Sumpto extra sectionem conicam vel sectiones opposi-*
63. 64. *tas quolibet puncto* A *quod non sit centrum; Dico bina*
quascunque H B, I B *contingentes sectionem vel sectio-*
nes oppositas in duobus occursibus rectæ cujusvis A H I
per punctum A *ductæ, convenire in punctum aliquod* B
rectæ F G *conjungentis tactus rectarum* A F, A G *se-*
ctionem, vel sectiones contingentium à puncto A *ducta-*
rum; vel in punctum B *rectæ quæ per contactum*
unicæ contingentis à puncto A *ducitur alteri asymptotôn*
parallela, quoties punctum A *in eadem asymptoto sum-*
ptum est.

Quod si recta A H I *sit alteri asymptotôn parallela,*
contingens in unico ejus occursu cum sectione per ejus-
dem asymptoti occursum cum recta B F G *transibit.*

Conversa est præced. atque inde manifesta. Nam
contingentes in H I coeant in B; ex A ductis contin-
gentibus A F, A G, conjungens tactus F G si opus pro-
ducta transibit per B, unde liquet propositum. Et sic
mutatis mutandis in omnibus casibus.

Nota. Si I H sit diameter Ellipseos vel sect. opp.
punctum B infinite distabit, hoc est, erunt I B, H B,
G F B parallelæ.

Prop. IX. Theor. VIII.

65. 66. *Si sectionem conicam vel sectiones oppositas contin-*
67. 68. *gant duæ rectæ* A F, A G *concurrentes in* A, *sumpto-*
69. 70. *que in tactus conjungente* F G *puncto* B, *ducantur to-*
tidem aliæ sectionem vel sectiones contingentes B H, B I,
prioribus contingentibus in K, L, & E, D *occurrentes;*
Dico has quatuor contingentes à mutuis occursibus, pro-
priisque contactibus harmonice dividi; scilicet à punctis

A, K,

,K,F,E; A,L,G,D; B,K,H,L; B,E,I,D; *vel* *fariam dividi tantum quando occursuum vel contactu-* *m aliquis abit in infinitum.*

Asymptoti contingentibus hisque parallelæ per ta- *ctus, tactus contingentibus (ut in prioribus) accensentur.*

Conjungens tactus H I (per prop. 7.) transit per A; t propter B G, A I harmonice divisas à B, F, O, G; ,H, O, I, (aut saltem bifariam divisas) Erunt A B, F, A O, A G, item B A, B H, B O, B I harmonicales, nde liquet propositum.

Coroll. Si tres tantum sint contingentes A F, A G, 65. 66.
H, quarum quælibet B H contingenti tactus reliqua- 67. 68.
um occurrit in B, ipsis vero contingentibus in K, L. 69. 70.
Dico hanc harmonice dividi à punctis B, K, H, L vel bifariam tantum si &c. Ducta A H & producta occurrat sectioni, vel sectioni oppositæ in I; Contingentes in H & I coibunt (per prop. 8) in aliquod punctum rectæ F G, quod erit punctum B in quod B H, F G prius coibant; Redit itaque casus in illum hujus prop. 9. Et sic in reliquis contingentibus, & in omnibus casibus.

Schol. In parallelis contingentibus B H, A G in Elli- 67.
psi & opp. sect. transit casus hujus corollarii in illum coroll. Prop. 27. partis 1.

Prop. X. Theor. IX.

In Ellipsi, & sectionibus oppositis; si à terminis di- 71. 72.
ametri alicujus A B *ducantur contingentes* A K, B I, *cui-* *vis aliæ contingenti* T D *occurrentes in* K, I; *Dico* A K × B I *æquale esse quartæ parti figuræ diametri* A B, i.e. (*si sit centrum* C *& parameter sive latus rectum* L R) C A × ½ L R = A K × B I.

A contactu T ordinetur ad diametrum recta T O, & à centro C agatur ad contingentem T D recta C R, rectis A K, B I parallela;

Per *Coroll.* 2. Prop. 1. hujus partis

1. C D : C A : C O ∺ id est
C D : C O :: C A q : C O q

Et dividendo

$$2.\left\{\begin{matrix} CO - CD \\ \text{vel } CD - CO \\ DO \end{matrix}\right\} : CD :: \left\{\begin{matrix} COq - CAq \\ \text{vel } CAq - COq \\ BO \times OA \end{matrix}\right\} : C$$

Per *Coroll.* 5. Prop. 24. Part. 1.

$$BO \times OA : OTq :: BA : LR :: \left\{\begin{matrix} \frac{1}{2}BA \\ CA \end{matrix}\right\} : \left\{ \frac{1}{2}L \right.$$

$$:: CAq : \left\{\begin{matrix} CA \times \frac{1}{2}LR \\ \frac{1}{4} \text{ fig. diam. } AB \end{matrix}\right\} \text{ vel altern:}$$

3. $BO \times OA : CAq :: OTq : \frac{1}{4}$ figuræ diam. AB;

Ergo (per Proport. 2 & 3)

4. $DO : CD :: OTq : \frac{1}{4}$ figuræ diam. AB.

Ob similia triangula.

5. $AK : OT :: CR : BI$ *i. e.* $OT \times CR = AK \times BI$.

6. $OT : CR :: DO : DC :: OTq : \left\{\begin{matrix} OT \times CR \\ AK \times BI \end{matrix}\right\}$

Ergo (per Proport. 3 & 6)

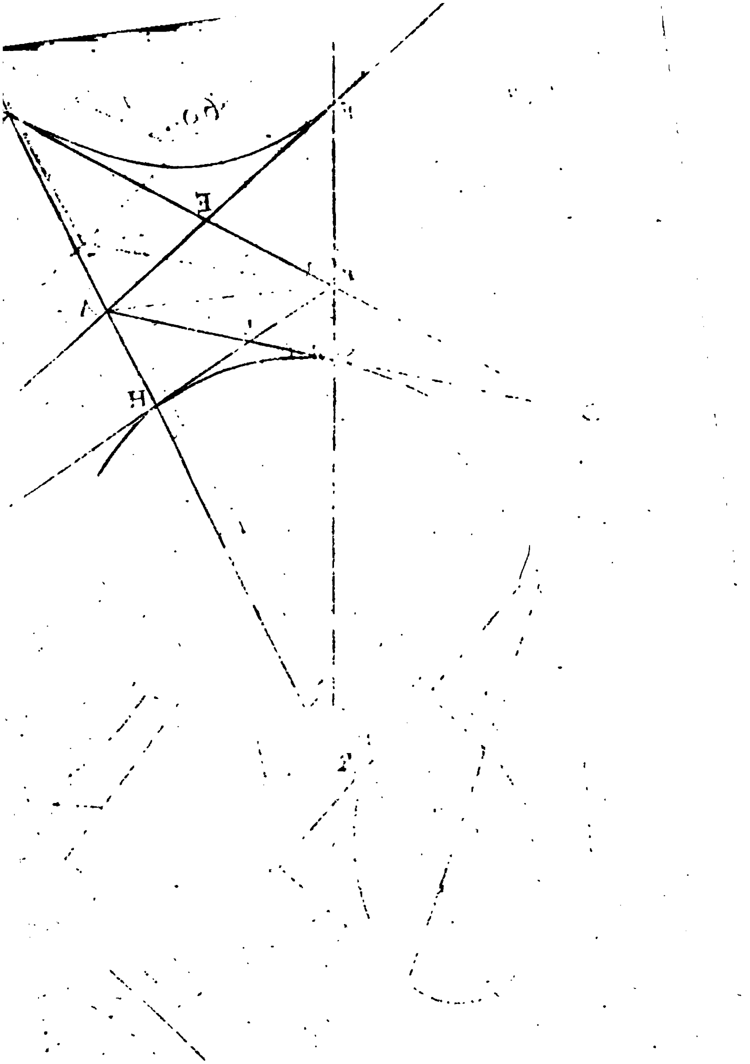
$OTq : \frac{1}{4}$ fig. diam. $AB :: OTq : AK \times BI$; Unde fig. diam. $AB = AK \times BI$.

73. *Coroll.* 1. Si coeuntibus C, D recta TD fiat asympto-tos, fit $AK = BI$, unde $AKq = BIq = \frac{1}{4}$ figuræ di-am: AB.

Coroll. 2. Hæc propositio cum Corollario primo va-lent conversim, nempe facta $AK \times BI = \frac{1}{4}$ fig. diam AB, erit juncta KI contingens. Et si AK, BI æqua-les sint, erit KI asymptotos, vel in Ellipsi erit diametr AB parallela. Oportet autem ut sumantur puncta K, I in Ellipsi ex eadem parte diametri, in oppositis sectioni-bus ex diversis.

74. *Schol.* Huic Sectionum opp. vel Ellipseos proprietat respondet illa Parabolæ $AKq = \frac{1}{4} LR \times AO$. Nam (ob $DA = AO$) $AKq = \frac{1}{4} TOq = \frac{1}{4} LR \times AO$.

PARS



PARS III.

Definitio.

Circulus & Sectio quævis conica se mutuo tangere dicuntur, cum in communi occursu communis recta utramque curvam contingere potest.

Coroll. Hinc si circulus sectioni conicæ in quovis puncto occurrat, utriusque vero curvæ partes concavæ easdem plagas respiciant, & immediate post occursum curvarum una ex eadem alterius parte (concava vel convexa) utrinque reperiatur, curvæ se mutuo contingent. Nam recta curvam exteriorem tangens utrinque extra interiorem cadet, *i. e.* eam continget. Hoc corollarium non obtinet conversim; ut suo loco ostendetur.

Prop. I. Theor. I.

Circulus sectioni conicæ quæ ipsa non sit circulus vel 1. 2. 3.
sectionibus oppositis ad quatuor plurima puncta occurrit. 4. 5.
Ad tria si eorum unum sit contactus, Ad duo tantum si utrumque.

Si dicas quinque esse occursus A, B, C, D, L; connectantur duo aliqui A, B item alii duo D, C, ita scilicet ut reliquus L inter duos non connexos reperiatur, rectæque A B, C D intra sectionem sese non decussent, quod semper fieri posse manifestum; rectæ A B, C D productæ concurrent in P, vel erunt parallelæ. 1. 2. 3.

Concurrant primo. Datis in utraque recta tribus P, A, B; P, C, D, & invento in utraque intra circulum quarto divisionis harmonicæ puncto E, F, juncta E F productaque occurret circulo in I, K, & sectioni vel sectionibus oppositis in G, H. eruntque connexæ P I, P K, P G, P H, (per Prop. 4. p. 2) contingentes.

 Con-

Connectatur P L, hæc producta occurret rectæ K I in O, circulo denuo in M, & sectioni vel sectioni oppositæ in N, aut erit Parabolæ diameter, aut Hyperbolæ vel sect. opp. asymptoto parallela.

1. Si occurrat denuo eidem sectioni, eadem (per Prop. 1. p. 2) propter circulum harmonice dividitur à punctis P,L,O,M, & propter Sectionem à punctis P,L,O,N, unde coincidunt puncta M, N.

3. Si A B, C D, parallelæ sint, recta per L his parallela, semper occurrit eidem sectioni denuo in N, circulo in M; estque rectarum A B, C D diameter sectioni & circulo communis & (ob parallelismum) bisecat utramque L M, L N in O, unde coincidunt N,M. Erunt ergo sex communia puncta. Hisce modis, inter duo quæcunque puncta (quorumvis quinque proximorum ope) aliud commune punctum invenietur, atque ita porro in infinitum; siquidem hujusmodi recta continuo eidem sectioni denuo occurrat, unde sectio erit circulus (priori circulo congruens) contra hypothesin.

2. Si vero recta P L occurrat sectioni oppositæ in N, erit L O unius divisionis pars extrema, alterius media, & similiter P L, unde L O *e.g.* (per Coroll. 2 ad def. div. harm.) & major, & minor erit quam L P, quod absurdum est.

Si fuerit parabolæ diameter vel hyperbolæ asymptoto parallela; propter circulum harmonice secabitur ut prius, & propter sectionem (per prop. 2. p. 2. vel Coroll. 4, prop. 1. p. 2) erit P L = L O, sunt ergo P L, L O propter sectionem æquales, & propter circulum inæquales, quod absurdum est.

4. 2. Si dicas quatuor esse occursus A, B, C, L, quorum unus A est contactus; in A statuatur communis recta contingens A P, & connectantur duo puncta B, C, ita ut residuum L sit inter tactum A & unum punctorum connexorum; si B C occurrat contingenti in P, invento intra circulum puncto divisionis harmonicæ F, ductaque A F occurrente circulo in K, & sectioni vel sectioni oppositæ in H, erunt junctæ P K, PH (per *Coroll.*

coll. post prop. 2. p. 2) contingentes, ductaque P L, &c. ut in simili casu partis primæ.

Si A P, C B parallelæ sint, rectæ C B diameter transibit per A estque circulo & sectioni communis, &c. ut in simili casu partis 1. Erunt ergo quinque communia puncta. Siquidem P L semper denuo sectioni occurrat, his methodis ope quatuor proximorum punctorum quorum unum est contactus A vel quorumvis quinque proximorum (ut in parte prima) invenietur inter duo quævis communia puncta aliud semper in infinitum unde circulus sectioni vel sectionibus oppositis congruet contra hypothesin; secus alterum è prioribus consequetur absurdum.

3. Si dicas tres esse occursus A, B, L quorum duo A, B sunt contactus, statuantur communes contingentes A P, B P; Si hæ concurrant in P ducatur P L, &c. ut in similibus casibus partis, 1, & 2. 5.

Si A P, B P parallelæ sint, diameter rectæ per L his parallela transibit per A, & B, &c. ut in similibus casibus partis 1, & 2. Unde erunt quatuor communia puncta.

Ope vero unius contactus & duorum occursuum invenietur quintus, ut in parte 2, eademque methodo, vel illa partis primæ, inter duo quæcunque assignata aliud semper in infinitum; Si nempe P L continuo sectioni occurrat; secus alterum è prioribus sequetur absurdum.

Nota. Si in parte 1 vel 2 hujus prop. dicatur P L sectionem contingere (quod in oppositis tantum sectionibus ulla verisimilitudinis specie dici potest) coincidet P L, cum P G vel P H, hoc est erit punctum L idem cum G vel H, & cum puncto O, quod est absurdum. Est enim O manifeste intra circulum ideoque ab L diversum. 6.

Schol. Hæc propositio valet etiam in occursibus sectionis cujusvis conicæ vel sect. opp. cum sectione quavis conica vel sect. opp. atque hæc demonstratio eo etiam extenditur. Demonstrandum vero prius est (quod ex corollariis 3 & 4 prop. 1. p. 2, & ex diametrorum

do-

doctrina satis commode fiet) si hyperbolæ vel sect. opp. asymptotos sit hyperbolæ vel sect. opp. asymptoto, aut parabolæ diametro parallela, sectiones in tribus plurimum punctis, vel duobus tantum quorum unum sit contactus sibi mutuo occurrere. In duobus vero punctis se mutuo non contingere; Unde recta P L in nullo casu hujus propositionis dici potest utriusque sectionis vel sect. opp. asymptoto parallela, nec parabolæ diameter & simul hyperbolæ vel sect. opp. asymptoto parallela; alias hoc posito vitabitur absurdum. Nos iis tantum quæ in sequentibus usui sunt contenti, cæteris brevitatis studio supersedemus.

Def. In omni sectione conica, vel sectionibus oppositis, diametri quibus ordinatæ suæ ad rectos angulos insistunt *Axes* appellantur.

Prop. II. Probl. I.

7. 8. *In Hyperbola vel sect. opp. & in Ellipsi Axes invenire; Et duos tantum esse axes ostendere.*

Inventa quavis diametro A B, quæ in hyperbola vel sect. opp. sit determinata, Diametro A B (*i. e.* centro sectionis C, intervallo C A, vel C B) describatur circulus A M B G; Hujus peripheria vel sectionem aut sect. opp. in A, & B, continget, (quo in casu per prop. præced. ei non amplius occurret) vel iterum occurret sectioni, vel sectionibus opp. in binis punctis M, G.

Si contingat in A & B, erunt ipsa A B atque huic conjugata, Axes quæsiti. Nam contingentes circulum H A I, K B R in hoc casu contingent etiam sectionem vel sect. opp. estque propter circulum angulus B A I, vel B A H rectus, & diametri A B conjugata erit parallela A I, suntque diametri conjugatæ ad se mutuo ordinatæ, proindeque hæ diametri sibi mutuo ad angulos rectos insistent.

Si A, B non sint contactus; Ex punctorum A, B utrovis A ad punctorum M, G utrumvis M agatur A M; Bisecta A M in N, & per centrum C ducta C N erunt

runt diameter C N atque huic conjugata Axes quæsiti.

Dem. Prior casus jam satis liquet. in secundo probandum primo est circuli peripheriam sectioni, vel sectionibus oppositis in M, G occurrere, deinde angulum C N A esse rectum.

Sectionem vel sect. opp. in A B tangant D A E, F B T, quæ (per coroll. 8 prop. 20. part. 1.) erunt parallelæ; cumque occursus A, B non sint tactus, erunt hæ à contingentibus circulum K B R, H A I, diversæ; Unde contingens sectionem B F, transibit intra circulum, & contingens circulum H A transibit intra sectionem, hoc est semicirculus B M A ad partes B est extra sectionem, vel utramque sectionum opp. ad partes vero A est intra sectionem, vel unam sectionum opp. unde necessario occurret ei alicubi in M, Pari ratione alter semicirculus occurrit sectioni ex altera parte, vel sectionum opp. alteri in G.

Connexa C M, erunt (propter circulum) C A, C M æquales, estque (ex construct:) M N = N A, unde Ang. C N A rectus, & (per cor. 3. prop. 22. part. 1.) L C N O est rectæ M N A diameter; Estque huic conjugata rectæ M N A parallela, suntque conjugatæ diametri, ad se mutuo ordinatæ, proindeque in nostro casu sibi mutuo ad angulos rectos insistunt.

2. Si jam præter diametros O C L, atque huic conjugatam Y C X, hac methodo inventas, alia quævis T C V dicatur axis; A quovis puncto sectionis vel utriusvis sectionum opp. A, ad T V, & ad unum ex axibus primo inventis O C L, sint ordinatæ A S R, A N M, & ducantur diametri A C B, R C Q, M C P; Ob A S = S R, & Ang. A S C (ex hypoth.) rectum, erit A C = C R; Pari modo erit A C = C M = C P = C B = (prius) C R = C Q; Unde (ob has rectas æquales) circulus centro C transire potest per sex puncta sectionis, vel sect. opp. P, Q, B, A, R, M, contra coroll. 1. prop. præced. Unde diameter T V non erit axis, neque huic conjugata. 9. 10.

Coroll.

11. *Coroll.* 1. In Ellipsi conjugati axes transversi L C (X C Y sunt inæquales. Alias connexa L Y, & bisecta i D, ductaque diametro B C D E, esset (ob L C = C Y angulus L D C rectus, cujus contrarium jam osten mus.

12. *Coroll.* 2. In Hyperbola Axis transversus O C L e minima omnium determinatarum diametrorum, & hu propiores sunt remotioribus minores. Nam si T V dic tur minor quam L O, semicirculus diametro L O secab T V in Z alicubi intra unam sectionum opp. & eide occurret denuo in A, unde diameter B C P quæ bisec junctam O A in P, (propter C A = C O,& O P = P A) erit axis, contra jam probata. Pari prorsus modo osten detur T C V remotiore quavis diametro minor.

13. *Coroll.* 3. In Ellipsi axis major est omnium diametro rum maxima, minor vero minima, & minori propiores remotioribus minores; majori, majores. Nam si T V dicatur minor quam Y X; Semicirculus diametro Y X secabit T V extra sectionem in Z secabit vero axem ma jorem (propter C O ⊏ CX) alicubi intra sectionem in F occurret itaque sectioni alicubi in A; unde ostendetu ut in præcedenti corollario diametrum B C P quæ con nexam X A in P bisecat, esse axem, ab ipsis O L, Y X diversum, quod absurdum. Eodem modo ostendetur majorem axem O L esse quavis alia diametro T V majorem, & majori propiores remotioribus majores, minori minores.

14. 15. 16. *Coroll.* 4. In hyperbola vel opp. sect. & Ellipsi, Diametri M C G, A C B ductæ ab extremis ordinatæ cujusvis M A ad utrumvis axem L O sunt æquales, idem intellige de contingentibus M E, A E in punctis M A, super axi (per Coroll. 17. prop. 20.p.1.) in puncto aliquo E coeuntibus. Patet ob M N = N A, ob communes E N, N C, & angulos ad N rectos.

14. 15. 16. *Coroll.* 5. In iisdem sectionibus recta E C bifariam dividens angulum vel à binis æqualibus contingentibus, vel binis æqualibus diametris factum, erit Axis. Nam bisecabit M A, eidemque ad angulos rectos insistet. In hyper-

yperbola vel opp. Sect. rectæ quæ bifariam dividunt trumque angulum asymptotôn sunt axes conjugati.

Coroll. 6. Et quarum diametrorum angulum utervis xis bifariam dividit, eædem sunt æquales. Nam in Ellipsi ex gr. Si dicas CQ (⊐ vel ⊏ CM) = CA, junctâ Q secante axem in P, & Sectionem in R, ob equales ngulos QCP, ACP, & CA = CQ erit AP = PQ, angulus ad P rectus; unde APR est ad axem ordinata, hoc est AP = PR = (prius) PQ, quod absurdum st, Et eodem modo (ductâ hujusmodi APQR) in yperbolâ vel sect. opp. coroll. demonstratur. 14.

Coroll. 7. Quæ diametri MCG, ACB æqualiter ab trovis axe distant æquales faciunt angulos ad contingentes in earum verticibus CME, CAE. Nam trianguli CME, CAE similes & æquales sunt. 14. 15. 16.

Coroll. 8. Ex Coroll. 2 & 3. Liquet circulum super axi determinato Hyperbolæ vel sectionum oppositarum anquam diametro descriptum totum esse extra utramque sectionem. Super Ellipseos axi majore sectionem bique intra se continere super Ellipseos axe minori à sectione contineri.

Prop. III. Probl. II.

Invenire Axem Parabolæ. Et unicum ejus esse axem ostendere.

Inventa qualibet diametro CD, sumptoque in eadem ubivis puncto D, Statuatur ei ad angulos rectos EDF occurrens sectioni in E, F; Bisecta EF in B, ductaque BA parallela CD, Erit BA axis quæsitus. Nam (per Coroll. 16. Prop. 20. p. 1.) est rectæ EF diameter, & ob rectas parallelas erit ang. ABF rectus. 17.

Nota si puncta B, D coincidant, ipsa diameter CD primo inventa est axis.

2 Si dicas alium esse axem CD ab AB diversum; Ordinata ad hunc FDE secante axem primo inventum in B; ob parallelismum diametrorum erit EF ad utrumque axem CD, AB recta, hoc est ad utrumque ordinata

nata *i. e.* tam in B, quam in D bisecta, quod absu
dum est.

18. *Coroll.* Corollaria 4, 5, Prop. præced. obtinent eti
in Parabola, eodemque modo patent; quoad continge
tes intellige; nam parabolæ centrum infinite distat; o
tinet etiam Coroll. 7. præced. in Parabola, ob similia
æqualia triangula E M N, E A N, & angulos G M
B A N rectos.

Prop. IV. Theor. II.

19. *In Ellipsi diametri* I C H, K C G *rectarum* A
A D, *utriusque axis extrema conjungentium sunt conj
gatæ, & æquales; & præter ipsas non sunt aliæ diam
tri conjugatæ æquales.*

19. Junctis E B, D B, ob C D = C E, & C A = C B,
angulos ad centrum rectos, erit A E B D figura parall
logramma laterum æqualium, unde diametri, I H, K
bisecant etiam E B, D B, ac propterea erunt rectis E
A D respective parallelæ, hoc est erunt diametri I
K G conjugatæ. Erit porro A F C N (ob A F || C
& A F = A N utpote æqualium A D, A E dimidi
figura parallelogramma laterum æqualium, unde ax
A C B bifariam dividet ang. F C N; sunt ergo (per C
roll. 6. Prop. 2.) diametri K G, I H æquales.

20. 2. Stantibus quæ in priore figura, sit alia quævis d
ameter O P ab ipsis K G, I H diversa, quæ dividat e
gr. Angulum G C H, itaque huic conjugata Q R
punctorum R Q altero R contingat recta R T, er
(propter conjugatas diametros) R T parallela O P, hoc e
non est T R parallela H I, nec K G; concurret erg
necessario contingens R T utrique G K, I H product
extra sectionem in T, & L, (nam si dicas T R L occu
rere G K in K hoc est si dicas coincidere puncta R, K, er
parallela rectæ I H contra jam probata; pariter de pun
cto H.) Eritque manifeste contactus R intra puncta L
T, rectæ L R T; *i. e.* intra puncta H K sectionis, und
diameter Q R dividet angulum H C K, itaque si axi
A C

ACB sit major, erit ob $GK = HI$ (per coroll. 3. Prop. 2.) $OP \sqsubset QR$; si axis ACB ponatur minor, erit $QR \sqsubset OP$, hoc est, erunt QR OP inæquales.

Coroll. Hinc duarum diametrorum conjugatarum quæ ab ipsis KG, IH diversæ sunt, una angulum GCH dividit, altera angulum HCK, qui est huic deinceps, major quidem illum quem dividit axis major, minor quem & axis minor. Eâdemque prorsus ratione ostendetur duas quasiibet diametros conjugatas dividere utrumque angulum à duabus quibuscunque aliis diametris conjugatis factum.

Coroll. 2. Unde in Ellipsi majoris diametri transversæ minor erit secunda huic conjugata, minoris major. Sint AB, ED axes; OP, QR quælibet diametri conjugatæ, & aliæ quælibet GK, HI: Cum OP dividat ang. ACD, huic conjugata QR dividet ang. DCB; & cum HI dividat ang. ACD, huic conjugata GK dividet ang. DCB; & cum eadem OP dividat ang. GCH, huic conjugata QR dividet ang. HCK: hoc est si OP dividat ang. ACH, dividet QR ang. DCK, unde (per coroll. 3. prop. 2.) erit $OP \sqsubset HI$, & $QR \sqsupset GK$. Contrarium accidit in hyperbola, ut suo loco ostendemus.

Coroll. 3. Hinc si duæ contingentes Ellipsim QM, GM concurrant in M, contingens QM in vertice minoris diametri QR major erit quam contingens GM in vertice majoris diametri GK. Nam QM, GM, sunt diametrorum QR, GK conjugatis OP, HI, respectivè parallelæ; Estque (per prop. 17. vel 18, p. 1.) $QMq : MGq :: OC \times CP = OCq : HC \times CI = HCq$. Estque (per corol. præced.) $OP \sqsubset HI$; hoc est $OC \sqsubset HC$; unde $QM \sqsubset GM$.

Schol. Cum in Hyperbola (non æquilatera) semidiameter transversa CB semidiametro secundæ CD, hoc est semicontingenti BL, sit ubique inæqualis, vertice vero B in infinitum abeunte & coincidentibus punctis L, C, rectæ CB, BL asymptoto & sibi invicem coincidant, hoc est tum demum fiant æquales; Responde- *Vide fig. 90. partis primæ.*

I 2 bunt

bunt aliquatenus Hyperbolæ asymptoti Ellipseos d metris conjugatis æqualibus, sed cum hoc discrimi quod ellipseos diametri sint altera alterius, utravis ve asymptotos sit quasi sui ipsius conjugata.

In Hyperbola æquilatera diametri conjugatæ su ubique æquales, uti etiam in Ellipsi, si Ellipsis sit circul Nam quod circulus inter ellipses, id hyperbola æquilate (quoad proprietates saltem nonnullas) inter hyperbol:

Prop. V. Probl. III.

21. 22. *In Hyperbola, & inter sectiones opp. & in Ellip invenire diametros quæ cum suis ordinatis angulum fa ciunt dato cuivis angulo non recto Q, vel ejus compl mento ad duos rectos æqualem; qui tamen in Ellip non sit major eo quem faciunt rectæ* B D, A D *ab utr que extremo axis majoris ad extremum minoris ductæ nec minor eo quem faciunt rectæ ab utroque extrem axis minoris ad extremum majoris.*

Super utrovis axe Ellipseos, vel determinato hyper bolæ, vel sect. opp. A B, tanquam chorda statuatur arcus circuli A E B capiens angulum dato angulo Q vel ipsius complemento æqualem, qui (si opus) post A B continuetur: occurret hic Sectioni, vel utrique Se ctionum oppositarum præter A, B in duobus punctis F, R; sumpto horum utrovis F, connectantur A F, B F, quibus bifariam divisis in L, O, ductisque dia metris H L C M, N O C P, hæ duæ diametri, toti demque aliæ eodem modo ope puncti R reperiendæ proposito satisfacient.

21. In Ellipsi sit (exempli gratia) A B axis major, Sectio nem contingat I A, in A; circulum contingat recta G A erit (propter axem) ang. I A B rectus, cumque arcus A E B (ex hypoth.) non sit anguli recti capax, contingens G A cum recta B A faciet ex una parte angulum acutum transibitque ideo ex eadem parte intra sectionem, hoc est arcus ipse transibit intra Sectionem; rursum arcus super chorda A B capiens angulum æqualem A D B, transibit

ansibit per D, ergo arcus qui (ex hypoth.) capit angulum minorem quam A D B secabit axem minorem extra Sectionem in E; est ergo idem arcus ad partes A intra Sectionem, ad partes vero E extra eandem, secabit ergo illam alicubi in F inter A, E. Pari ratione secabit eandem in R inter E,B idemque erit (mutatis mutandis) in axe minori.

In Hyperbola vel sect. opp. contingat I A unam è Sectionibus oppositis, & A G circulum: ob angulum I A B rectum & B A G obliquum, non coincident I A, A G, sed angulum efficient, unde recta quævis angulum I A G dividens, transibit tam intra circulum quam sectionem, hoc est circuli circumferentia ad puncta A,B (nam utriusque eadem est ratio) transit intra sectiones quæ cum in se revolvatur utrique necessario occurret denuo in F, R. 22.

Jam in utraque figura, propter F L = L A, & B C = C A, erit C L parallela B F, & A F parallela C O, unde ang. C L A = C O B = B F A = dato Q vel ejus complemento. Idemque erit de diametris ope puncti R repertis. 21. 22.

Coroll. In hyperbola vel opp. sect. manifestum est angulum Q sumi posse dato cuivis obtuso vel acuto æqualem, angulumque quem determinata aliqua diameter facit cum suis ordinatis, vel cum contingente in ejus vertice, eo obliquiorem esse quo magis eadem diameter ab axe determinato distat; & pariter in diametro huic conjugata. In Ellipsi hujusmodi angulus ab utravis axe ad utramvis diametrorum conjugatarum æqualium fit semper obliquior atque inde ad alterum axem continuo ad rectum vergit: ut consideranti non difficile patebit. Qua in re ulteriorem ejusmodi diametrorum, cum hyperbolæ, vel opp. Sectionum asymptotis, analogiam observare licet.

Coroll. 2. In Ellipsi, liquet angulum C L A vel C O B à semiaxe majore subtensum esse obtusum, nam huic æqualis B F A insistit arcui B A semicirculo majori. In hyperbola liquet angulum C L A vel C O B,

esse

esse acutum, nam huic æqualis B F A insistit arcui A B semicirculo minori. Idem intellige de angulis qu ad easdem partes hæ diametri faciunt cum continge tibus in earum verticibus: sunt enim hæ contingen ordinatis parallelæ.

Prop. VI. Probl. IV.

23. *Idem in Parabola præstare.* Inventa qualibet diam tro K B L, ad hanc inclinentur duæ rectæ A B I C D B G E in angulis K B E, L B C dato Q æqualibu occurrentes sectioni in A C, D E; Bisecentur A C, D in I, G; per I, G agantur diametri H I, F G. Propte diametrorum parallelismum erunt anguli H I B, F G æquales dato Q; unde proposito satisfit.

Coroll. Facile manifestum erit diametros F G, H I a axe M N æqualiter utrinque distare; & quo longius aliqua diameter ad utramvis partem ab axe distat, eo hujusmodi angulum esse obliquiorem.

Prop. VII. Theor. III.

24. *In Hyperbola secunda diameter axi conjugata, vel quod idem est, contingens in ejus vertice* E B D *asymtotis terminata minor est quam contingens in vertice cujuslibet alterius diametri ut* H F G; *& quo qualibet diameter est axi propior, eo ejusmodi contingens minor est, major quo remotior.*

Per tactum F & utrumvis rectæ GH extremum *e.g.* H, agantur FNL,HIK, parallelæ EBD secantes axim in N,I, & asymptoton (illam scilicet in qua non est punctum H) in L, K, & connectatur L I. Ob G F = F H, erit H K = 2 F L; & ob E B = B D, erit I H = I K, hoc est I H = F L; unde (ob parallelas rectas) erit I L = F H. Et (si A B dicatur axis) ob angulum I N L rectum, erit I L ⊏ L N, *i. e.* F H ⊏ L N; unde multo magis F H ⊏ D B, atque harum dupla G H ⊏ E D.

2. Si A B non sit axis sed alia qualibet diameter, &

t M F quælibet diameter ab axe remotior quam A B; rit angulus quem faciunt rectæ A B, E D ad partes axi ontrarias obtusus, cum (per Coroll. 2. prop. 5.) ad artes axis sit acutus; hoc est erit angulus A B E ideoue & huic æqualis L N I obtusus; ergo in hoc quoque asu L. I $\sqsubset$ L N; cæteraque consequentur ut in casu riore, unde patet propositum.

Coroll. 1. Hinc (contra quam in Ellipsi) majoris dimetri transversæ major est secunda huic conjugata, minoris minor. Nam quo magis diameter hyperbolæ ab xe distat eo major est ut in Coroll. 2. Prop. 2. ostenum est.

Coroll. 2. Positis ut prius, sit contingentium H F G, E B D concursus O, erit F O $\sqsubset$ B O. Nam (per Prop. 16. p. 1.) G F q : E B q : : O F q : O B q; unde (ob G F $\sqsubset$ E B) erit O F $\sqsubset$ O B. Idem erit in Sectiones oppositas contingentibus.

Lemma 3.

In figuris A B C D, *sit* B C = C D, *& ang.* A C D *obtusus*, i. e. *ang.* A C B *acutus dico* A D $\sqsubset$ A B. 25, 26.

Ab A in D B (si opus productam) cadat perpendicularis A E ob ang. acutum cadet hæc ad puncti C partes B, ideoque D E $\sqsubset$ B E Estque

$$A D q = A E q + D E q$$
$$A B q = A E q + B E q \sqsupset A E q + D E q$$

unde A D $\sqsubset$ A B.

Prop. VIII. Theor. IV.

Parabolam in punctis B, D *contingant* B A, D A *concurrentes in* A, *tactusque* B *vel axis* L M N *vertici coincidat, vel sit eidem axi tactu* D *proximior*, i. e. *ordinata ad axem* B M *sit minor quam* D N, *dico* D A $\sqsubset$ B A. 27. 28.

Connexa D B, & bisecta in C, erit juncta A C (per Prop. 20. p. 1.) ejusmodi diameter & parallela M N; Si B sit axis vertex, vel si B, D sint ex eadem parte axis, manifestum est A C non coincidere axi: Idem liquet

quet si sint ex axis partibus diversis propter BM $\sqsupset$ D
& CB = CD. Producta si opus DB occurret axi in
eritque ang. LOD *i. e.* ACD manifeste obtusus, un
de per Lemma præcedens liquet propositum.

Prop. IX. Theor. V.

29. 30. 31. *In omni Sectione Conica, Ad axem AHI qui si determinatus Hyperbolæ, sed utervis Ellipseos, ordin tur recta* CHB, *occurrens Sectioni in* C, B; *In punctis vero* C, B *Sectionem contingant* CA, BA *super axi concurrentes in* A, *vel in Ellipsi forte axi parallelæ; de scribatur circulus* CEBI *qui rectam* CA (i. e. *sectionem*) *in* C *contingat, transeatque per punctum* B; *Dico eundem rectam* BA, *vel (quod perinde est) sectionem in* B *contingere, & præter puncta* B, C, *totum esse intra sectionem, siquidem in Ellipsi* AHI *fuerit axis major; Sin* AHI *fuerit Ellipseos axis minor, præter eadem puncta* C, B, *totum esse extra sectionem.*

29. 30. 31. In omnibus casibus occurrat axis sectioni in D, circulo in E; si concurrant CA, BA, propter axem erit (per Coroll. 4. Prop. 2. & Coroll. Prop. 3.) AB = AC, unde AB (ex Elementis) circulum continget in B, id est (ex def.) circulus sectionem continget. Per D & E agantur FD, GE Parallelæ BC, utrivis contingenti BA occurrentes in F G; cum sit axis AH ad BC perpendicularis, erit sectionis & circuli communis diameter, ideoque (per Coroll. 8. Prop. 20. p. 1.) FD sectionem, EG circulum continget, eritque (per Coroll. 3. Prop. 4. vel Coroll. 2. Prop. 7. vel per Prop. 8.) BF $\sqsubset$ FD, vel si AH sit Ellipseos axis minor FD $\sqsubset$ BF. Si sit BF $\sqsubset$ FD, cum sit propter circulum BG = GE, erit necessario BG $\sqsupset$ BF; nam si BG dicatur $\sqsubset$ vel = BF, cadet GE ad rectæ FD partes A, vel eidem coincidet, hoc est erit GE $\sqsupset$ vel = FD adeoque ob BF $\sqsubset$ FD) erit BG $\sqsubset$ GE contra circuli naturam. Est ergo BF $\sqsubset$ BG *i. e.* (ob rectas parallelas) HD $\sqsubset$ HE, hoc est punctum E cadit intra sectionem. Pari ratione oc

cursus

cursus alter axis cum circulo I erit intra ellipsin. Nam in Hyperbola & parabola per se manifestum est.

Si A H I sit axis minor ellipseos, erit (ut prius) B F ⊐ F D, unde haud absimili modo ostenditur puncta E, I cadere extra sectionem. Propter duos contactus B, C circulus (per Prop. 1.) sectioni non amplius occurrit, ergo in priori casu (viz. cum E, I sint intra sectionem) circulus totus erit intra sectionem; in posteriori (ubi hæc puncta sunt extra sectionem) totus erit extra sectionem. 31.

Si in Ellipsi A B, A C parallelæ sunt, erit B C axis unde (ex Coroll. 8. Prop. 2.) patet propositum.

Coroll. In figuris 29, 30. Liquet Circulum C E B I maximum esse omnium sectioni inscriptibilium & eandem in puncto C tangentium. In fig. 31. Circulum C E B I minimum esse omnium Ellipsi circumscriptibilium & eandem in puncto C tangentium, Nam (fig. 29. 30.) ejusmodi major quivis secabit B C extra sectionem. In fig. 31. minor quivis secabit B C intra sectionem. 29, 30. 30, 31.

Prop. X. Theor. VI.

Iisdem positis rectisque C A, B A *concurrentibus, si per* B *agatur diameter* B M K, *& ad hanc à puncto* C *ordinetur recta* C V R, *occurrens sectioni denuo in R; describatur vero circulus rectam* C A (*i. e. sectionem*) *in puncto* C *contingens, transiensque per punctum* R, *Dico hunc circulum præter tactum* C *in unico hoc puncto* R *sectioni occurrere, Hoc est ex una parte rectæ* C R *totum esse extra sectionem, ex altera intra sectionem.* 32, 33. *Supple figuras hyperb. & parab. &c.*

In Hyperbola, Parabola, & Ellipsi cujus axis major sit A H. Circulus rectam C A in C contingens & per punctum quodvis N inter B & R, vel inter B & C, transiens, manifeste major erit circulo (in priore Prop.) per B transeunte (nam circulus per B totus intra sectionem cadit) & secabit rectam C B, productam extra sectionem in S, hoc est circulus C N S ad partes B est extra sectionem. 32.

Ex N ordinata ad diametrum B M K recta N T O, occurret circulus sectioni denuo in O, nam producta O N occurrat A C in L, propter O N L || A B erit (per Prop. 17, & 18. p. 1.) $CLq : LN \times LO :: CAq : ABq$ *i. e.* (ob $CAq = ABq$) $CLq = LN \times LO$; unde cum punctum N, sit ad circulum, erit & O; & cum C sit contactus, circulus C M O S (per Prop. 1.) nisi in C, N, O sectioni non occurret; hoc est, cum S sit extra sectionem, arcus N O erit extra sectionem, arcus vero C N, C O intra sectionem; Nam si dicatur circulus ex utraque parte N, vel O, esse extra sectionem, ex tribus occursibus C, N, O saltem duo erunt contactus, quod (per Prop. 1.) fieri nequit; eritque (ob punctum R extra circulum C N O) circulus C R major circulo C N O.

Augente se circulo C N O, & accedente puncto N ad C, accedet simul O ad R, & coincidentibus tandem N C, coincident simul O, R, & evanescente arcu C N, totus arcus C S O, *i. e.* jam C R erit intra sectionem; vel circulus ad rectæ C R partes B, est extra sectionem.

33. Porro ex altera parte rectæ C R, sumpto in sectione puncto N, quod in Ellipsi non sit punctum K, ductaque L N O ut prius; circulus in C contingens & per N transiens ostendetur (ut prius) transire per O; circulus vero C N O nisi in C, N, O sectioni non occurrit, & in Hyperbola & Parabola quarum curvæ ex hac parte infinitæ sunt, manifestum est arcum N O esse intra sectionem.

33. In Ellipsi vero ducta contingente K P, erit hæc parallela A B unde ob $ABq : ACq :: KPq : PCq$ & $AB = AC$, erit $KP = PC$, unde punctum P (per Coroll. 5. Prop. 2.) est ad axem minorem, & C K erit ad eundem axem ordinata; circulusque contingens in C, & per K transiens (per Prop. præced.) erit tota extra sectionem, hoc est comprehendet punctum N, vel O, unde (ob tactum C) circulus C N O minor erit circulo per K, & secabit rectam C K intra sectionem in S, hoc est arcus N S O erit intra sectionem.

In omnibus igitur sectionibus arcus N O est intra sectionem.

ctionem. Erunt vero in omnibus, arcus C N, C O extra sectionem; nam si dicatur circulus ex utraque parte puncti N vel O esse intra sectionem, è tribus occursibus duo saltem erunt contactus, quod absurdum est; Comprehendit insuper circulus C N O punctum R, proindeque est (ob tactum C) circulo C R major.

Minuente se circulo C N O, & accedente puncto N ad C, accedet simul O ad R, & coincidentibus N C, coincident simul O, R, evanescente arcu N C, totus arcus C S O, hoc est jam arcus C R, erit intra sectionem; vel circulus ad rectæ C R partes K (*i. e.* ipsi B contrarias) est intra sectionem. Liquet ergo propositum.

Coroll. Hinc quamvis circulus Sectioni Conicæ occurrens, & ex utraque occursus parte ad easdem sectionis partes cadens, in eodem occursu sectionem necessario contingat; non tamen circulus sectionem conicam contingens necessario ex utraque contactus parte ad easdem ejus partes cadit.

Coroll. 2. Cum omnis circulus sectionem in C contingens, & per punctum quodvis in sectione ex una parte rectæ C R (quantumvis puncto R propinquum) transiens, minor sit circulo C R, & ex utraque parte con- 32.
tactus intra sectionem reperiatur, hoc est magis incurvetur quam sectio in puncto C; Circulus vero illam 33.
in eodem contingens & per punctum quodvis ex altera ejusdem rectæ parte transiens, sit major circulo C R, & ex utraque contactus parte cadat extra sectionem, hoc est minus incurvetur quam sectio in eodem puncto C; Sectionem in hoc puncto C circulo C R æquicurvam esse merito existimare licet.

Si axis A H in Ellipsi ponatur minor, eadem erit demonstratio sed inversa *viz.* pro *major* legendo *minor*, pro *intra*, *extra* & vice versa.

Prop. XI. Theor. VII.

34. 35. Suppl. figuras parab. & hyperb. &c. *Iisdem positis per C sit diameter CL, quæ (si opus producta) occurrat circulo CR in Q; Dico CQ æqualem esse rectæ DF quæ est parameter diametri CL.*

In Hyperbola & Ellipsi sit Circulus CNO idem qui in figuris præcedentibus secans CQ in X; à puncto N (viz. punctorum N, O ipsi C propinquiore) ad diam. CL ordinetur NPIS, occurrens scilicet diametro CL in I; & circulo denuo in S, & à puncto C erigatur ad CA perpendicularis CP, secans NS in P; erit hæc circuli diameter, & (ob CA ∥ NS) bisecabit NS in P. Si punctum I non sit primo intra circulum CNO, augente vel minuente se circulo CNO prout puncta N, O fuerint ad has vel illas partes rectæ CR, (ut prius) cum accedente N ad C, & O ad R, accedat continuo I ad C, & X ad Q, transibit tandem necessario punctum I intra circulum CNO, eritque manifeste PI (ob SP = PN) ipsarum IS, IN semidifferentia.

In DF (producta, in Hyperbola) intelligatur punctum E mobile, & hac quidem lege, ut accedente I ad C sit semper LC : CI : : DF : FE; erit per (Prop. 34. p. 1.) CI × DE = NIq, hoc est

CI : NI : : NI : DE, & ob circulum

erit CI × IX = NI × IS hoc est

CI : NI : : IS : IX, unde per 11. El. 5. & permut.

NI : IS : : DE : IX.

Accedente N ad C, accedit simul O ad R, adeoque X ad Q, fitque ipsarum NI, IS semidifferentia PI continuo minor, hoc est rectæ NI, IS, proindeque his proportionales DE, IX continuo ad æqualitatem vergunt; & tandem coincidentibus punctis S, P, I, N ipsi C, puncto O ipsi R, adeoque X ipsi Q, & evanescente PI, evanescunt quidem simul IN, IS, sed eodem tempore rationem æqualitatis adeptæ; unde evadit simul IX = DE, hoc est jam CQ = DE; coincidentibus vero I, C coincidunt simul E, F, hoc est CQ = DF.

Eadem

Eadem demonstratio parabolæ inservit omisso puncto E.

Corollaria ad hanc & Prop. præced.

Coroll. 1. In Sectionis Conicæ qualibet diametro C L 34, 35,
(producta si opus in Ellipsi,) si fiat C Q æqualis ejusdem diametri parametro, & in puncto C sectionem con- 36, 37,
tingat recta C A, circulus rectam C A in C contingens 38.
& per punctum Q transiens erit sectioni in hoc puncto C æquicurvus. Si diameter C L non sit axis, satis patet ex præcedentibus, nam non erit à circulo C R diversus: cum vero hæc proprietas competat cuilibet diametro præter axem; etiam axi competet, nam diameter axi infinite vicina ab axe non differt, neque hujus parameter ab axis parametro.

Coroll. 2. Coincidente puncto C axis vertici G, (qui 32.
in ellipsi sit major) coincident etiam ei puncta B, R, 36, &
arcusque circuli C R qui prius erat extra sectionem eva- 37.
nescet, hoc est totus circulus C R erit intra sectionem 33. &
puncto vero C minoris axis ellipseos vertici coinci- 38.
dente, arcus circuli qui prius erat intra sectionem evanescet, hoc est totus circulus C R erit extra sectionem.

Coroll. 3. Arctior igitur sive intimior est hujusmodi 32, 33.
circuli & sectionis conicæ contactus quam simplex qui- & 36,
vis contactus, sed in axis vertice arctissimus. Nam si 37, 38.
punctum C sit extra axis verticem simplici contactui C circuli C N O coincidit occursus N; in axis vero vertice his accedit & O, *i. e.* R.

Coroll. 4. In fig. 36, 37. Liquet circulum G Q *i. e.* 36, 37.
G Q maximum esse omnium sectioni inscriptibilium & eandem in axis vertice G tangentium. Nam in vertice diametri axi infinite vicinæ, quæque ideo ab axe non differt, circuli æquicurvi arcus extra sectionem erit infinite parvus, hoc est non differet circulus ab ipso circulo G Q, & quivis ejusmodi circulus circulo æquicurvo major ex utraque tactus parte erit extra sectionem. Pari ratione in fig. 38. Erit Circulus G Q minimus omnium sectioni circumscriptibilium & eandem in vertice minoris axis G tangentium.

Æquidistiorum dimidia. $BO \times OA = OA \frac{1}{2}$ param. U
de $BO = \frac{1}{4}$ param.

Prop. XV. Theor. XI.

47. *In Parabola, cujus axis* BC, *ejus vertex* B, *& i*
quævis diameter EF, *ex* E *ordinata ad axem recta* E
dico LR *parametrum diametri* EF *superare* lr *pa*
metrum axis quantitate quadrupla rectæ BC; i. e.
$+ 4BC = LR$.

In E contingat EA occurrens axi in A, ex B ad d
metrum EF ordinetur BF; erit BF parallela EA, u
de (ob BC parall. EF) erit $FE = BA =$ (per pro
2. p. 2.) BC & $AE = BF$; estque (propter axe
angulos ACE rectis, ergo
$lr \times BC = (CEq =) AEq - ACq =$ (ob AB :
BC) $AEq - 4BCq = BFq - 4BCq = LR \times E$
$- 4BCq = LR \times BC - 4BCq$, unde (propter æqu
lem altitudinem BC) erit $lr = LR - 4BC$ vel lr
$4BC = LR$.

P A R

Ergo rectangulum, sub dimidia $BO \times OA = OA \frac{1}{2}$ pari de $BO = \frac{1}{2}$ parata.

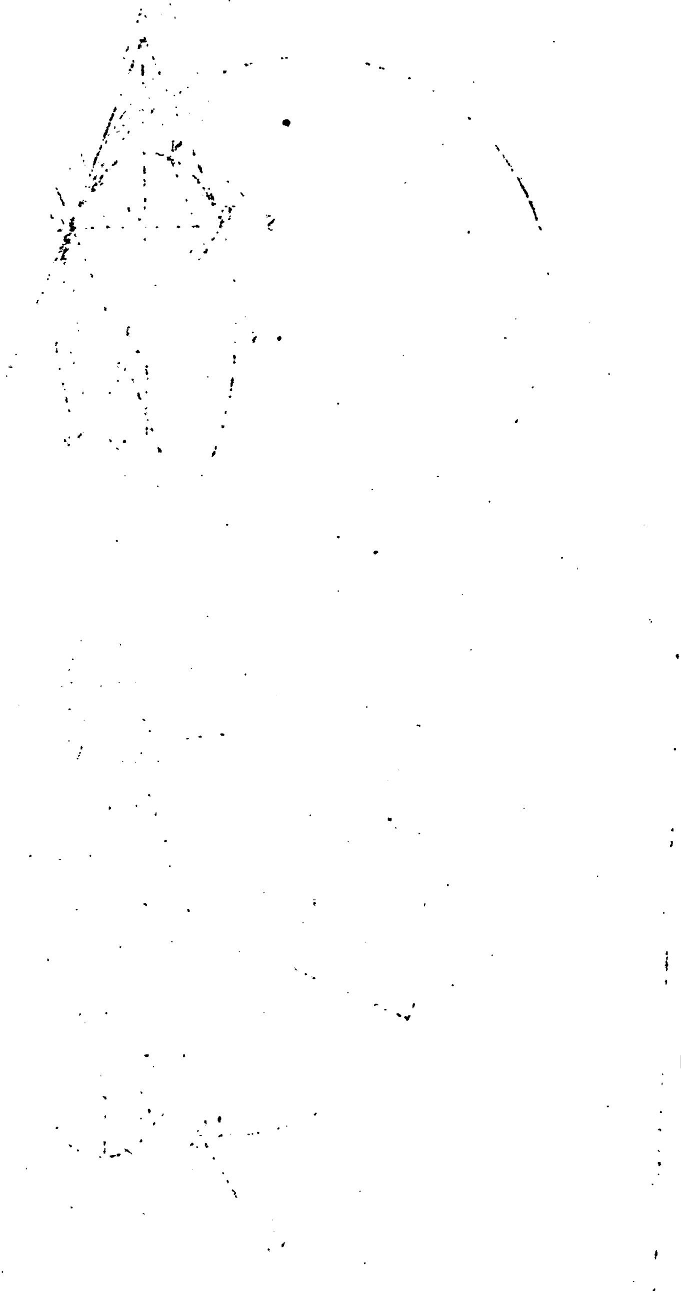
Prop. XV. Theor: XI.

47. *In Parabola, cujus axis BC, ejus vertex B quævis diameter EF, ex E ordinata ad axem re dico LR parametrum diametri EF superare l metrum axis quantitate quadrupla rectæ BC;* $lr + 4BC = LR.$

In E contingat EA occurrens axi in A, ex B metrum EF ordinetur BF; erit BF parallela E de (ob BC parall. BF) erit FE = BA = (p 2. p. 2.) BC & AE = BF; estque (propter angulus ACE rectus, ergo

$lr \times BC = (CEq =) AEq - ACq =$ (ob BC) $AEq - 4BCq = BFq - 4BCq = L$ $- 4BCq = LR \times BC - 4BCq$, unde (propter lem altitudinem BC) erit $lr = LR - 4BC$ vel $4BC = LR.$

PAR



PARS IV.

Prop. I. Theor. I.

SI Circulus BCDA *super axi majore Ellipseos, vel sectionum oppositarum* AB, *tanquam diametro de-scriptus, rectam quamvis* IET *Sectionem, vel utram-s Sectionum oppositarum utcunque in* T *tangentem ...et in* C, *&* D *punctis, & in his erigantur ad contin-...ntem perpendiculares* CF, DH, *occurrentes axi in* F, ...; *dico rectangula* $CF \times DH$, $BF \times FA$, $AH \times$ B *sibi invicem, & quartæ parti figuræ axis, esse æ-...alia.* 1, 2.

Ex A, & B, erectæ ad axem perpendiculares contin-...entem secent in G, I; productæ si opus CF, DH cir-...lo denuo occurrant in K, L; productaque denique ...ntingens occurrat axi in E, vel sit ei parallela. Si ...ccurrat, erit ob sim triang.

$EB:EC::BI:CF$; & propter circulum $EB:$ ...$C::ED:EA::$ (ob sim. triang.) $DH:AG$; unde ...er 9. 5ti $BI:CF::DH:AG$, hoc est $CF \times DH$ $= BI \times AG =$ (per prop. 10, part 2.) $\frac{1}{4}$ figuræ Axis.

Sed (ob chordas CK, DL ad chordam CD perpendi-...ulares) erit $CK = DL$, & cum sit BA diameter cir-...li, erit $CF = HL$, $HD = FK$, unde $CF \times DH =$ ...$F \times FK = BF \times FA = DH \times HL = AH \times HB =$ ...prius) $\frac{1}{4}$ figuræ axis.

Si contingens sit axi parallela, quod fieri potest in ...llipsi; erunt CF, DH ad axem perpendiculares, & ...m sibi invicem, quam rectis AG, BI æquales, unde ...$F \times DH = IB \times AG = CFq = BF \times FA = DHq$ ...$AH \times HB$.

Coroll. Ob $AH \times HB = BF \times FA$, liquet $AH =$ ...F, $BH = AF$.

Prop. II. Theor. II.

3. *In Parabolâ* T A, *si ab axeos* A K *vertice* A *erigatu usque ad quamlibet contingentem* T E *perpendiculari* A G, *& à puncto* G *erecta ad contingentem perpendicularis* G H *secet axim in* H, *erit* H A $= \frac{1}{4}$ *parametri axis.*

A tactu T ordinatâ ad axem T K, erit (per Prop. 2 Part. 2.) A E = A K unde G A = ½ T K, & G A q = (ob ang. rect.) H A × A E = ¼ T K q = A K × ¼ Param = A E × ¼ Param. unde H A = ¼ Param.

1, 2. Vel aliter, considerari potest ut casus prop. præcedentis. Nam si Hyperbola vel Ellipsis A T vertice B in infinitum abeunte mutetur in Parabolam, circulus diametro A B degenerat in lineam rectam ad axem perpendicularem, coinciduntque puncta D, G, hoc est rectæ D H, G H; estque H A × H B = A B × ¼ param. & (ob B infinite distans) H B = A B, unde H A = ¼ Param. axis A B.

1, 2. *Def.* Puncta H, F (in Prop. 1.) veteribus *Puncta ex comparatione*, Neotericis *FOCI* sive *VMBILICI* appellantur.

3. De puncto H in Parabola (in hâc Prop.) silent veteres, à neotericis tamen *Foci* vel *umbilici* nomine pariter insignitur.

Corollaria ad duas præced. Propositiones.

Coroll. 1. Unicus est Parabolæ focus; Sectionum oppositarum, & Ellipseos bini.

1, 2. *Coroll.* 2. In Sectionibus oppositis, & in Ellipsi, junctis I H, G H erit angulus I H G rectus. Nam ob A H × H B = I B × A G, *i. e.* A H : A G : : I B : H B, & angulos ad B & A rectos, similia erunt triangula I B H, H A G, & Ang. B I H = G H A = compl. ang. I H B ad rectum, proindeque I H G rectus. Pari modo junctis I F, F G erit ang. I F G rectus. In Parabolâ cum
3. punctum I infinitè distet ductâ I H parallelâ T E erit ang. I H G manifeste rectus.

Coroll.

Coroll. 3. Atque hinc in oppositis Sectionibus, & Ellipsi Circulus diametro I G transibit per utrumque focum. In Parabolâ vero hujusmodi circulus (ob I G infinitam) degenerat in rectam G H. 1, 2. 3.

Coroll. 4. In omni Sectione Conica quæ F E ex focorum alterutro F est ad axem ordinata, æquatur axis semiparametro. Nam in] Opp. Sect. & Ellipsi sit C D axis minor, erit (per Coroll. 7. Prop. 23. p. 1. & Coroll. 4. Prop. 24.) 4, 5.

$$FEq : \left\{ \begin{matrix} DCq \\ AF \times FB \end{matrix} \right\} :: AF \times BF : BCq$$

i. e. F E : D C : B C $\div$ proindeque F E $=$ $\frac{1}{2}$ param. In Parabola (ob B F $=$ $\frac{1}{4}$ param) B F x param $=$ $\frac{1}{4}$ param. q $=$ F E q unde F E $=$ $\frac{1}{2}$ param. 6.

Coroll. 5. In Ellipsi si C D sit semiaxis minor erit connexa D F vel D H æqualis semiaxi majori nam F D q $=$ C D q $+$ F C q $=$ (propter Coroll. 4. Prop. 24.) B F x F A $+$ F C q $=$ B C q, unde B C $=$ F D. 4.

In oppositis Sectionibus, vel hyperbola si contingens in vertice B occurrat asymptoto in G erit C G $=$ C F vel si sit C D semiaxis secundus ipsi C B conjugatus & connectatur D B erit D B $=$ C F nam ob C D $=$ B G erit C G $=$ B D estque D B q $=$ C D q $+$ C B q $=$ (propter idem Coroll 4.) A F x F B $+$ C B q $=$ C F q; unde D B $=$ C F. 5.

Coroll. 6. Hinc in Ellipsi circulus centro D intervallo C B, In Hyperbola circulus centro C intervallo D B, vel C G, transibit per utrumque focum. 4, 5.

Coroll. 7. Si Ellipseos axes sint æquales, hoc est si Sectio sit circulus uterque focus centro coincidit, nam B F x F A $=$ C D q $=$ (in hoc casu) B C q unde coincidunt F, C, H. 4.

Coroll. 8. Si Hyperbola sit æquilatera, erit A F : B C : B F $\div$ nam A F x B F $=$ $\frac{1}{4}$ A B x param $=$ (in hoc casu, per Coroll. 1. Prop. 24.) B C q. 7.

Coroll. 9. In Hyperbolæ æquilateræ utravis asymptoto facta C G $=$ C B, & per G ducta G F alteri asymptoto parallela, hoc est ad C G perpendiculari, hæc per 7.

foenum transibit. Nam ob utrumque ang. G C F, G I C semirectum, erit G F = G C = (ex construct.) C B = D C, ergo C F = D B.

Prop. III. Theor. III.

8, 9. *In Hyperbola vel Sectionibus oppositis, & in Ellipsi si ab utroque foco* F, H *ad quodvis Sectionis punctum* T, *ubi recta* C T E *eandem contingit, agantur bina recta* F T, H T; *Dico Angulum* F T C = H T E.

Occurrat primo C T E axi in E. Stantibus circulo & rectis C F, D H ut prius.

8. In Hyperbola vel Sect. Opp. ordinata ad axem recta T K, per E ducatur X E Y parallela T K *i. e.* ad B A perpendicularis secans circulum in X, Y; cum sit propter sectionem (per Coroll. 1. Prop. 1. Part 2.) B K : K A :: B E : E A, contingentes circulum in X, Y coibunt super circuli diametro B A (per Coroll, 17. Prop. 20. *p. 1.* & per Prop. 1. p. 2.) in puncto K, unde (per Prop. 3. p. 2.) C T : T D :: C E : E D.

9. In Ellipsi ordinata ad axem T K, & producta ad circulum in X, Y; cum sit B K : K A :: B E : E A, contingentes circulum in X, Y coibunt in E, unde (per

8, 9. Prop. 1. p. 2.) erit in Ellipsi (uti prius in Hyperbola) C T : T D :: C E : E D :: (ob sim. triang.) C F : D H; ergo ob æquales angulos (rectos scilicet) F C T, H D T; & proportionalia latera, erunt triangula C T F, D T H similia unde Ang, F T C = H T E.

Supple fig. hujus casus. Si (in Ellipsi) sit C T D parallela A B, res per se manifesta est.

Prop. IV. Theor. IV.

10. *Si Parabolam contingat utcunque* C T G *in* T, *tactum vero* T *& focum* H *jungat* T H, *& per* T *agatur* F T *axi* H E *parallela, dico Ang.* F T C = H T E.

Manentibus quæ in Prop. 2. ob K A = A E erit T G = G E; unde (ob ang. T G H rectum) similia & æqua-

lia

erunt triangula G T H, H E G; ergo Ang. H E G; r. F T C = H T G.

Aliter sic: si Ellipsis, vel Hyperbola (foco F in infi- 8, 9, 10.
tum abeunte) convertatur in parabolam, fiet F T pa-
llela H E, estque semper Ang H T E = F T C.

Coroll. 1. Si duæ parabolam contingentes B E, D E 11.
ncurrant in E, connexis D H, H B erit angulus ad
cum D H B = 2 D E B. Tangentes (earum una pro-
ducta) occurrant axi in C, I, fiatque E G axi parallela;
. triang. D H I, B H C isosceles, erit Angulus
H L = 2 D I H = 2 D E G, & L H B = 2 B C H =
B E G; ergo addendo liquet propositum.

Coroll. 2. Contingentes in extremis B, D rectæ cujus- 12.
B H D per parabolæ focum ductæ concurrentes con-
stituunt angulum B E D rectum. Nam ostendetur ut
priore Coroll. Ang. B H L + D H L, *i. e.* 2. Rect.
= 2 B E D.

Prop. V. Theor. V.

In Hyperbola vel Sectionibus oppositis, & Ellipsi, ab utroque foco H, F *ad quodvis Sectionis punctum* T *ducantur rectæ* H T, F T, *dico in Ellipsi summam ipsarum* H T, F T, *in Hyperbola earundem differentiam æquari axi* A B.

Manentibus quæ in Prop. 3. Sit centrum O, & con- 8, 9.
nectatur O D, vel O C, *ex: gr*: O D, rectaque H D pro-
ducta occurrat F T productæ C (si opus) in S: Propter
ang. H T D = (per Prop. 3.) S T D, & ang. T D H
rectum, erit S T = T H & S D = D H; estque in El-
lipsi F S = F T + T H, in Hyperbola F S = F T — T H.
Propter F H & S H bisectas in O, & D, erit O D pa-
rallela F S, & F S = 2 O D = (ob circulum) B A.

Coroll. Si àb utrovis foco Hyperbolæ vel Sect. Opp.
sive Ellipseos ad cujuslibet contingentis T E tactum T
ducatur F T, & à centro Sectionis O ad contingentem
usque agatur O D ipsi F T parallela; erit O D æqua-
lis semiaxi O B, vel O A. Incidit enim in medium pun-
ctum

ctum D rectæ S H, quod est ad circulum A D C B [illegible]
liquet &c.

Not S D = D H, & F S = B A.

Prop. VI. Theor. VI.

13, 14. *Iisdem positis; in Hyperbola vel Sect. opp. & Ell[illegible]* *si tactu* T *erecta ad contingentem perpendicularis* T[illegible] *secet axim in* V, *& ab* V *demittantur ad* F T, H T (*opus productas) perpendiculares* V X, V Y; *dico* T[illegible] T Y *esse sibi invicem, & axis semiparametro æquales.*

15. *Idem erit in Parabola, si ab hujusmodi puncto* V *d[illegible] mittantur perpendiculares ad rectam* T H *unicum se[illegible] onis focum* H *& tactum* T *conjungentem, & ad recta[illegible]* T F *per tactum ductam axi parallelam.*

Propter angulum C T F = D T H (per prop. 3. & V T ad C T perpendicularem, erit Ang. V T Y = V T X; & (ob angulos ad X & Y rectos, & commun[illegible] latus T V) erunt triangula V T X, V T Y similia, [illegible] æqualia, unde T X = T Y. Rursum (ob ang. C T[illegible] rectum) erit T V parallela C F, & triangula F T[illegible] F S H similia;

Item (ob T X V rectum, & T V || F C) Triangu[illegible] T F C, V T X similia; unde

F S : S H : : F T : T V &

T X : F C : : T V : F T Ductisque &c.

F S × T X : S H × F C : : F T × T V : F T × T V H[illegible] est F S × T X = S H × F C = (ex nota præced.) 2 D[illegible] × F C = (per Prop. 1.) $\frac{1}{2}$ param. × A B; sed F S (p[illegible] Prop. Præced.) = A B, ergo T X = $\frac{1}{2}$ param = T Y.

15. In Parabola, ordinata ad axem T L, erit (ut in p[illegible] ore parte) triang. V T Y = & sim. V T X = & si[illegible] V T L, unde Y T = T X = L V = (per Prop. 1. p. 2.) $\frac{1}{2}$ param.

13, 14. Hoc etiam in Parabola vel inde liquet quod Ellipse[illegible] vel Hyperbolæ foco altero F in infinitum abeunte, [illegible] sectione in Parabolam mutata, fiet T F axi parallela.

Pro[illegible]

Prop. VII. Theor. VII.

In Hyperbola sive oppositis sectionibus, & Ellipsi, distantia inter focum & centrum F O, *est media proportionalis inter semiaxem majorem* O A, *& summam in Hyperbola vel Sect. opp. sed differentiam in Ellipsi semiaxis ejusque semiparametri; hoc est si ponatur* S P *semiparameter,* 16, 17.

$$OA : OF : \left\{ \begin{array}{l} \textit{in Hyperb.}\ OA + SP \\ \textit{in Ellipsi}\ OA - SP \end{array} \right\} \div$$

Nam

$$OAq : \left\{ \begin{array}{l} OA \times SP \\ \tfrac{1}{4}\ \text{fig. axis} \\ BF \times FA \\ \text{in Hyper}: OFq - OAq \\ \text{in Ellipsi}: OAq - OFq \end{array} \right\} :: OA : SP;$$

Unde Comp. in Hyperbola, div. in Ellipsi

$$OAq : OFq :: OA : \left\{ \begin{array}{l} \text{in Hyper}\ OA + SP \\ \text{in Ellipsi}\ OA - SP \end{array} \right.$$

Estque hæc ratio duplicata rationis O A : O F, unde

$$OA : OF : \left\{ \begin{array}{l} \text{in Hyperb.}\ OA \times SP \\ \text{in Ellipsi}\ OA - SP \end{array} \right\} \div$$

Prop. VIII. Theor. VIII.

In omni Sectione Conica, & in Sectionibus oppositis, si per focum F *agatur recta linea* P F L *sectioni, vel sectionibus oppositis occurrens in* P, L *punctis, in quibus sectionem, vel sectiones oppositas contingant* P E, L E *concurrentes in* E, *sive forte inter se parallelæ; Connexa* F E [*vel si contingentes sint parallelæ ducta* F E *his parallela*] *dico ang.* E F P *rectum esse.* 18, 19. Supple figuras Hyperb. & Sect. opp.

Invento axe C F A, in utrovis ejus extremo [vel unico in Parabola] A, erigatur ad eum perpendicularis A D (*i.e.* contingens) cui producta (si opus) L P occurrat in D, vel sit ei parallela.

Si occurrat. A puncto D ducatur (per Prop. 4. p. 2.)

p. 2.) contingens D I N; occurret hæc axi in N, erit ei parallela.

Tactus A, I jungat recta A I, secans L P in M, producta (per Prop. 7. p. 2.) transibit per E, recta A E in punctis A, M, I, E (per Prop. 1.) harmonice viditur.

Porro in Hyperbola, Sectionibus oppositis, & Ellipsi, in altero axis extremo C sit contingens C G, occurrens D I N in G, & connectatur G F.

Siquidem recta D I G N occurrat axi in N, (quod semper fit unico casu in Ellipsi excepto) eadem (per Coroll. Prop. 9. p. 2.) harmonice dividitur in D, I, G, N alias bifariam tantum dividitur à punctis D, I, G. Est vero punctum I utrique rectæ D I G N, A *M I E* commune, & reliqua divisionum puncta debito ordine (juxta Lem. 9, vel 10. p. 2.) jungunt rectæ D M, E G, A N [aut saltem erit A N parallela D I,] unde (per idem Lem. 9, vel 10. p. 2,) rectæ D M, E G, A N in unum punctum coeunt, quod erit necessario punctum F in quod rectæ P L *i. e.* D M, & A C *i. e.* A N prius coibant; hoc est recta E G rectæ G F coincidit; unde angulus E F P. *i e.* G F D (per Coroll. 2. post Prop. 2.) erit rectus.

19. In Parabola, I D N semper occurrit axi & bisecatur in D, estque punctum I utrique rectæ I D N, I M A E commune, unde rectæ D M, N A quæ utriusque rectæ puncta debito ordine conjungunt, & recta E H à reliquo puncto E ducta parallela I D N, coibunt (per Lem. 10. p. 2.) in unum idemque punctum F, in quod scilicet rectæ N A, & P L *i. e.* D M primo coibant; hoc est coincidit E H ipsi E F; estque (ob rectas parallelas) ang. E F D *i. e.* E F P = I D F, qui (per convers. Prop. 2.) est rectus.

In Ellipsi, & opp. Sect. si P E, L E sint parallelæ, recta P L axi coincidit.

Si P L sit parallela A D (qui quidem casus in oppositis Sectionibus non obtinet) erit ad axem ordinata, rectaque E F axi coincidet; estque in utroque casu propositio per se manifesta.

Coroll.

Coroll. In Hyperbola vel sect. opp. Punctorum L, P ero *ex. gr.* P in infinitum abeunte, contingens P E asymptotos, evaditque ipsi L F parallela, rectaque E F occursu contingentis L E cum eadem assymptoto ad cum ducta erit tam ad asymptoton, quam ad rectam F, perpendicularis. Vel conversim: Ab E erecta ad symptoton perpendicularis per focum transibit.

Prop. IX. Theor. IX.

In Hyperbola, Sectionibus Opp. & Ellipsi, sint foci 20, 21. *Supple figura sectionum opp.* B, *& axis major vel determinatus* G H; *in quo* (*prorecto in Ellipsi*) *sumatur punctum* C, *ut sit* A B : G H B H : H C; *à puncto* C *erecta ad axem perpendiculari* E, *sumatur quodlibet in Sectione vel utravis sectionum opp. punctum* K, *à quo ducta* K E *axi parallela occurrat* C E *in* E, *& connectatur* B K, *dico* A B : G H : : B : K E.

Producta K B (si opus) occurrat denuo sectioni, [vel sectioni cujus est focus B si punctum K sit ad sectionem oppositam] in I. Propter A B : G H : : B H : H C erit alternando, & componendo in Ellipsi, dividendo in Hyperbola & sectionibus oppositis,

$$\left.\begin{matrix} AB \pm BH \\ GB \end{matrix}\right\} : BH :: \left\{\begin{matrix} GH \pm HC \\ GC \end{matrix}\right\} : HC$$

Erit itaque (per propp. 1, & 6. p. 2.) recta C E illa in cujus punctum aliquod D coeunt rectæ K D, I D sectionem vel sectiones oppositas in punctis K, I tangentes, ductâque D B, erit (per prop. præced.) ang. D B K rectus, & ob angulum D E K pariter rectum, circulus diametro K D per puncta E, B transibit.

Ducta A K (& si opus producta) secet circulum in F, & connectantur F E, F B.

Propter ang. F K D (per prop. 3.) = B K D, erit arcus K F = K B, chordaque K F = K B, ac proinde (per prop. 5.) A F = G H.

Porro (ob rectas parallelas) erit angulus F K E = F A B; & (ob F K = K B) erit in Ellipsi & opp. sect.

ang. F E K = K F B; in hyperbola vero ang. F E compl. K B F = (ob arcum K F = K B) comple to K F B, *i.e.* B F A, unde in omnibus Triangula F F B A similia, ergo

$$A B : \begin{Bmatrix} A F \\ G H \end{Bmatrix} :: \begin{Bmatrix} F K \\ K B \end{Bmatrix} : K E.$$

Coroll. H B : H C : : K B : K E, & sic ubique.

Prop. X. Theor. X.

22. *Sit Parabola* H K, *cujus focus* B, *&* *axis* B H, *in sumatur extra sectionem* H C = H B; *in puncto erecta ad axem perpendiculari* C E, *sumatur quodvis sectione punctum* K, *à quo ducta* K E *axi parallela currat* C E *in* E, *&* *connectatur* B K; *dico* B K K E.

Ducta contingente M K G, & ordinatâ K O; ang. M K L (per prop. 4.) = G K B = K G B, er G B = B K. Sed (per prop. 2. p. 2) G H = H O, und additis æqualibus C H, H B, erit G B *i. e.* K B = C = (ob rectas parallelas) K E.

20, 21. Vel aliter. Considerari potest ut casus præcedentis nam si Hyperbola vel Ellipsis, foco A in infinitum mi grante, mutetur in Parabolam, fit A B = G H & B H = H C, unde B K = K E.

22. *Coroll.* Cum sit (per prop. 15. p. 3.) H O quarta pars excessûs parametri diametri K L supra parametrum axis, & C H = H B (per prop. 2.) sit quarta pars parametri axis; Liquet K B sive K E = C O æquari quartæ parti parametri diametri K L.

Prop. XI. Theor. XI.

23. *In Parabola* H K I, *cujus focus* B, *ad axem* H B *ordinatâ* B I, *sumptoque in sectione quolibet puncto* K, *agatur ad ordinatam usque* (*si opus productam*) *recta* K D *axi parallela, &* *connectatur* K B; *si* D *cadat intra sectionem* (i. e. *si* K *sumatur inter* H *&* I) *dico* B K + K D =

K D $=$ B I; *si* D *cadat extra sectionem* (i. e. *si* K *sumatur ex altera parte rectæ* B I) B K — K D $=$ B I *i. e. semiparametro axis.*

Facta C E eadem quæ in præcedenti, huic occurrat K D producta in E, estque B I (per Coroll. 4. post prop. 2.) æqualis axis semiparametro $=$ (per prop. 2. & ex construct.) B C $=$ (ob parall.) D E $=$ K E $\pm$ K D $=$ (per prop. præced.) B K $\pm$ K D.

Prop. XII. Probl. I.

Datarum Sectionum Conicarum focos invenire.

Constat variis modis ex Propp. I. & II. cum Corollariis, & aliis hujus partis.

PARS. V.

Prop. I. Probl. I.

1\. PER *datum punctum* B, *intra datas asymptotos* A I, K G, *Hyperbolam describere*.

Per B ducantur utcunque quotlibet rectæ B A, B C, B I ad unam asymptoton in A, C, I terminatæ, ad alteram vero in G, E, K; fiantque G F, E D, K H, ipsis A B, B C, B I respective æquales; erunt puncta F, D, H (per Coroll. 1. Prop. 15. p. 1.) ad Hyperbolam quæsitam. Hac methodo, ope ejusdem puncti B, vel cujuslibet ex modo inventis innumera ejusmodi puncta invenientur.

2\. *Coroll.* 1. Hinc si detur quælibet diameter determinata S B, & secunda huic conjugata N O, quæ ad se invicem inclinentur in dato angulo S M O; describetur hyperbola. Nam sit centrum M, ducta P B Q parallela N M O, factisque B Q = M O = B P, erunt junctæ M P, M Q asymptoti & punctum B ad sectionem.

2\. *Coroll.* 2. Vel si detur S B diameter determinata, & L R pro parametro, cum angulo quem oportet ordinatas, vel contingentem in vertice facere cum diametro; describetur hyperbola. Nam media proportionalis inter diametrum & ejus parametrum erit secunda huic conjugata; unde constat per Coroll. 1.

Prop. II. Probl. II.

3\. *Supple reliquos casus.* *Datis Ellipseos quibuscunque diametris conjugatis* A B, D E *se mutuo bifariam in* C *secantibus, & ad invicem in dato quovis angulo* D C B *inclinatis; Sectionem describere.*

Per utriusvis diametri C D utrumvis terminum D ducatur

ducatur ad alteram A C perpendicularis D P, ei occurrens in P; in qua sumatur ex utravis parte puncti D recta D Q æqualis semidiametro A C, & connectatur Q C quæ etiam ex altera parte puncti C producatur; in C Q sumatur, ex utravis parte puncti C, punctum quodvis G (modo non sit G C major quam Q C) quo tanquam centro intervallo Q P describatur circulus secans diametrum A B (si opus productam) in F, T; Connexâ *ex. gr.* G F, in hac (si opus producta) versus diametrum A B sumatur G S æqualis semidiametro A C, si nempe punctum Q fuerit in D P ad utramvis partem producta; secus sumatur G S = A C ad partes ipsi A B oppositas: Erit punctum S ad ellipsin cujus diametri conjugatæ C A, C D. Idem fiet ope puncti T. Eademque methodo quotlibet hujusmodi puncta invenientur.

Per G ducta I G parallela Q D secante C D in O, connectatur S O, fiatque S R parallela C D secans A C in R. Erit ob P Q $\parallel$ G I & ex constructione,

$$\left.\begin{matrix} PQ \\ FG \end{matrix}\right\} : GI :: \left\{\begin{matrix} DQ \\ GS \end{matrix}\right\} : GO \text{ unde}$$

S O parallela A C & G O = S R, S O = C R. Rursus ob sim. triang.

$$CDq : \left\{\begin{matrix} COq \\ SRq \end{matrix}\right\} :: \left\{\begin{matrix} DQq \\ GSq \\ ACq \end{matrix}\right\} : \left\{\begin{matrix} OGq \\ GSq - SOq \\ CAq - CRq \\ AR \times RB \end{matrix}\right.$$

Unde (per Coroll. 7. Prop. 23. p. 1.) punctum S erit ad Ellipsin.

Coroll. Hoc modo, si detur utravis diameter cum ejusdem parametro, & angulo quem cum diametro faciunt ejus ordinatæ vel contingens in vertice, describetur Ellipsis. Nam ex data diametro ejusque parametro innotescit diameter huic conjugata.

Schol. Si datæ diametri A B, D E sint axes, coincidunt C D, Q D P, unde constructio evadit simplicissima.

Prop.

Prop. III. Probl. III.

4. *Datis Parabolæ diametro quavis* T D, *vertice* T, *recta* T C *pro contingente in vertice, ad diametrum in quovis angulo* C T D *inclinata, & præter* T *puncto quovis* P *ad Sectionem; Sectionem describere.*

Per P ducatur P C parallela T D occurrens T C in C. In T D & C P, ad contrarias partes rectæ T C, sumantur utcunque æquales T I, C L; junctæ P I, T L sese intersecent in S, erit punctum S ad sectionem quæsitam. Eodemque modo quotcunque ejusmodi puncta invenientur.

Ducantur S B parallela T D, & S Z P D parallelæ T C, & connectatur I C; erit (ob I T = C L) I C || T L. Ob similia triang.

$$BS : CL :: TB : TC \ \&$$

$$\left.\begin{matrix} TI \\ CL \end{matrix}\right\} : CP :: TS : \left\{\begin{matrix} IC \\ TL \end{matrix}\right\} :: TB : TC$$

Unde BS : CL : CP $\div$ Ergo

$$BS : CP :: BSq : CLq :: \left\{\begin{matrix} TBq \\ SZq \end{matrix}\right\} : \left\{\begin{matrix} TCq \\ PDq. \end{matrix}\right.$$

Unde (per Coroll. 4. Prop. 20. p. 1.) erit punctum S ad Parabolam.

Nota. Si C L sumatur citra rectam T C (respectu scilicet puncti P) T I ultra; erunt puncta S, P ad easdem partes diametri; secus ad diversas.

Coroll. Hinc datis diametro quavis T D ejusque parametro cum angulo C T D, describetur parabola; nam sumpto ubivis in diametro puncto D ductaque D P parallela T C, si in hac sumatur D P media proportionalis inter parametrum & abscissam, erit punctum P ad sectionem. Unde consit ut prius.

Prop. IV. Probl. IV.

5. 6. *Datis Hyperbolæ axe determinato, vel majore Ellipseos A B, & utroque foco F, G; Sectionem describere.*

In

In F G (productâ in hyperbolâ) ſumatur utcunque punctum C; centro F, intervallo A C, rurſus centro G, intervallo C B, deſcribantur arcus circulares qui ſeſe interſecent in D; erit punctum D ad ſectionem. Eodemque modo &c.

Junctis F D, G D, ob D G = B C & F D = A C erit in Hyperbola F D — D G, in Ellipſi F D + D G = A B, unde liquet per prop. 5. part. 4.

Prop. V. Probl. V.

Datis Parabolæ axe A F, vertice A, & foco F, Sectionem deſcribere. 7.

In axe A F productâ ſumatur A B = A F *i. e* $\frac{1}{4}$ param. axis, & ducatur B E ad A B normale; centro F intervallo quovis F C majori A F deſcribatur arcus ſecans A F productam in C, centro C eodem intervallo deſcriptus arcus ſecet B E in E, denique centris E, F eodem adhuc intervallo deſcripti arcus ſeſe interſecent in D erit punctum D ad Parabolam.

Eſt enim figura F C E D (per conſtr.) parallelogramma æquilatera. Hoc eſt F D = D E unde patet per prop. 10. part. 4.

Addi-

Additiones ſive Explicationes.

Pag. 32. Cor. 8. Prop. 23. ſic legendum.

90. *Coroll.* 8. Si angulus aſymptoton ſit rectus, erit ubi-
que $CB = CD$, ſi acutus $CB \sqsubset CD$, ſi obtuſus CB
$\sqsupset CD$. Nam ſemicirculus diametro $KL = ED$ in
primo caſu tranſibit per C, in ſecundo citra C, in ter-
91. tio ultra C; unde $CB =, \sqsubset, \sqsupset BL$ *i. e.* CD. Si elli-
pſis ſit circulus erit ubique $CB = CD$.

Pag. 35. lin. 28, 29. &c. ſic lege

$$2.\ CMq : NGq :: \left\{\begin{matrix} MA \\ CL \end{matrix}\right\} : \left\{\begin{matrix} NA \\ GK \end{matrix}\right\}$$ ergo ex æquo

$ID \times DH : NGq :: CD : GK$ & per coroll. prop. 18.

$$3.\ \left\{\begin{matrix} AKq \\ NGq \end{matrix}\right\} : HE \times EI :: GK : GE$$ unde ex æquo

$4\ ID \times DH : HE \times EI ::$ &c.

Pag. 56. ad finem demonſtrationis prop. 7. adde

Si MR ſit aſymptoto parallela, ducendæ ſunt KN, BN huic parallelæ; ſi GF, HI ſint parallelæ (quod in opp. ſect. fieri poteſt) ducendæ ſunt MR, KR his parallelæ &c. Si recta aliqua ſit cuivis harmonicalium parallela, non harmonicè ſed biſariam ſecabitur; eademque (quæ prius) ſequentur, adhibitis (pro re nata) lemmate 6 vel 10, & coroll. 4 vel 5 prop. 1.

Pag. 66. lin penult. poſt hæc verba [puncta H, K Sectionis] *adde*

Nam ſi dicatur eſſe inter K, I vel H, G; cum LT occurrat utrique GK, HI, occurret etiam ipſi OP (utpote in hoc caſu intermediæ) cui tamen parallela eſt, quod abſurdum; unde &c.

Pag. 85. poſt coroll. 1 prop. 4. adde

Si puncta H, E ſint ad diverſas partes rectæ conjungentis tactus D, B, oſtendetur angulum ad focum DHB æqualem eſſe duplo complementi anguli DEB.

FINIS.

Errata graviora sic corrigenda.

PAG. 3. lin. 27. lege *contingit*, & dele *secus*. p. 5. lin. 8. *occurrit denuo in* F. ib. lin. 26. *plano, plano* A D E *parallelo*. ib. lin. 32. pro B l. E. p. 8. lin. 2. pro B C E l. B C F. p. 7. lin. 31. pro D F I K l. E F H K. ib. lin. 32. pro FGIK l. DFIK. p. 10. lin. penult. pro A E l. A D. p. 13. lin. 30. *concurrant*. p. 15. lin. 6. *ut in* C, G. ib. lin. 14 *intersectioni*. ib. lin. 17. D C K. p. 16. ad lin. 9. in margine pone numerum 43. ib. ad lin. 14. pro 43 substitue 42. ib lin. 18. *asymptotos*. p. 17. lin. 11. pro B D l. B, C. p. 18. ad lin. 27. in marg. pone num. 56. p. 19. l. 22. O, P, Q, N. p. 20. lin. 12. *in quadratis contingentium*. ib. 17. *infinitarum*. p. 25. lin. 14. pro L G l. L E. ib. ad lin. 31. in marg. scribe num. 78. p. 28. lin. 1. pro *ductæ* l. *duæ*. ib. lin. 18. pro H K l. I M. ib. ad cor. 17. in marg. adde num. 78. p. 32. lin. 17. *prop*. 20. p. 33. lin. 12. *quæ*. p. 34. lin. 3. 4. l. R L × D K — M R × D K. p. 35. lin. 17. pro O R l. G R. p. 36. lin. 14. pro M G l. N G. ib. lin. 28. *punctis* N, D. ib. lin. 33. *si* (*tactu* L *infinitum ab.*) *recta* A L *fiat. &c.* p. 37. lin. 1. *punctis* D, N. ib. lin. 13. *in* B, E. p. 39. lin. 23. *aliqua*. p. 41. lin. 1. C B. ib. lin. 8. pro C E l. C B. ib. lin. 11. pro GS l. CR. ib. lin. 12. pro CB l. CB q pro QR l. QR q. ib. penult. *fiat tertia* &c. p. 45. lin. 4. F E, G E, H E &c. p. 46. lin. 12. *Sed* (*per coroll. 6. &c.*) ib. lin. 20, 21 dele *&*. p. 47. l. 22. E I M H, B L N F *ipsi* D G *parallelæ occurrant &c.* p. 48. lin. 9. *occurret*. ib. 30. *in coroll*. 1. p. 49. lin. 4. *unde* (*per jam &c.*) p. 51. lin. 1. Q P *parallela* F G *eidem &c.* p. 53. lin. 17. & 19. pro A K. l. A V. p. 54. antepenult & penult. *tangens in puncto unico convenit*. ib. in marg. ad prop. 7. adde num. 64. p. 57. lin. 5. *tactus conjungentibus*. ib. lin. 12. *conjungenti*. p. 58. lin. 13. *Per coroll. 2. prop. 1. p. 2, & ob similia triangula*. ib. lin. 17. *per proport*. 4 *&* 6. p. 61. lin. 19. *parallelæ*. ib. lin. 23. *quintum*. p. 63. lin. 35. dele *coroll*. 1. p. 65. lin. 15. *triangula &c.* p. 66. lin. 26. *atque huic conjugata* Q R; *in punctorum &c.* ib. 29. *occurret*. p. 71. lin. 18. dele 3. ib. lin. antepenult. *ejusdem*. p. 75. l. 9. *& evanescente*. ib. antepenult. l. *Schol. si axis &c.* p. 79. lin. 6. *coincidet*; *sed* (*per prop. &c.*) ib. lin. 19. *occursuum*. ib. lin. 32. *à tactu* T, *occurrens axi*. p. 85. lin. 26. dele C. p. 86. lin. 6. *si à tactu*. ib. lin. 28. pro *prop. præced*. l. *nos. præced*. p. 87. lin. 20. pro A S × S P l. A S + S P. p. 95. lin. ult. *per prop*. 10.

Pag. 74. lin. 7. pro C M O S l. C N O S. ibid. lin. 18. pro intra l. extra.